绝密★启用前

2023年普通高等学校招生全国统一考试预测卷:福建专版

数 学

(考试时间:120分钟;试卷满分:150分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集为 $\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6<0\}$,$B=\{x\mid \ln x>1\}$,则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=$ ( )

A. $(e,3)$　　B. $(-\infty,e)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$　　D. $(-\infty,e]\cup[3,+\infty)$

2. 已知复数 z 满足 $\dfrac{1-i}{1+i}-z=1$,则 $|2+i\,\bar{z}|=$ ( )

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

3. 二项式 $\left(\dfrac{y^2}{3x^2}-\sqrt{x}\right)^{10}$ 的展开式中含 y^4 项的系数为 ( )

A. $-\dfrac{10}{3}$　　B. 5　　C. $-\dfrac{40}{9}$　　D. $\dfrac{70}{27}$

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x(\omega>0)$ 的零点是以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为公差的等差数列. 若 $f(x)$ 在区间 $[0,\alpha]$ 上单调递增,则 α 的取值范围为 ( )

A. $\left(0,\dfrac{5\pi}{12}\right]$　　B. $\left(0,\dfrac{7\pi}{12}\right]$　　C. $\left(0,\dfrac{5\pi}{24}\right]$　　D. $\left(0,\dfrac{7\pi}{24}\right]$

5. 大雁塔是佛塔这种古印度佛教的建筑形式随佛教传入中原地区,并融入华夏文化的典型物证,是现存最早、规模最大的唐代四方楼阁式砖塔(如图1所示). 2014年,它作为中国、哈萨克斯坦和吉尔吉斯斯坦三国联合申遗"丝绸之路"中的一处遗址点,被列入《世界遗产名录》. 大雁塔由塔基、塔身、塔刹三部分组成(如图2所示),全塔通高64.7 m. 塔基为长方体,高约为4 m,南北

长约为 48 m,东西长约为 45.5 m;塔身近似呈正四棱台,底层边长约为 24 m,侧面是底角约为 81.95°的等腰梯形;塔刹高约 4.7 m. 则大雁塔塔基与塔身的体积之比为(参考数据:$\tan 81.95° \approx 5\sqrt{2}$)　　(　　)

图1

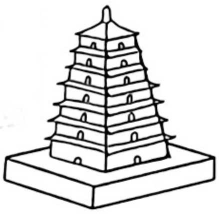


图2

A. 4∶7　　B. 5∶11　　C. 7∶13　　D. 9∶16

6. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=0$,$y=f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称. 当 $x\in[0,1]$ 时,对任意 $k\in[0,1]$,$f(x)$ 满足 $f(kx)+1=[f(x)+1]^k$,且 $f(1)=-\dfrac{1}{2}$,则 $f\left(-\dfrac{9}{2}\right)=$　　(　　)

A. $-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知 $a=\log_3 7$,$b=3\ln 2$,$c=\sqrt[5]{6}$,则　　(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $b>c>a$

8. 已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的 4 个顶点均在球心为 O、直径为 $2\sqrt{3}$ 的球面上,$PA=\sqrt{2}$,且 PA,PB,PC 两两垂直. 当 $PC+AB$ 取最大值时,三棱锥 $O\text{-}PAB$ 的体积为　　(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x+\dfrac{1}{2}$,则下列说法正确的有　　(　　)

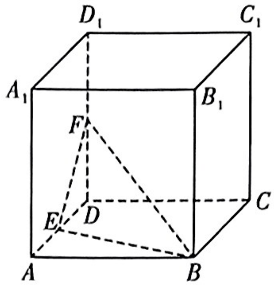
A. $x=\dfrac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$ 上单调递增

C. $y=f(x)+f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$

D. $y=\sqrt{3}x-\dfrac{1}{2}$ 是 $y=f(x)$ 的一条切线

10. 如图所示,已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,点 E,F 分别是棱 AD,DD_1 的中点,点 P 是侧面 B_1BCC_1 内一点(含边界). 若 D_1P∥平面 BEF,则下列说法正确的有 ( )



A. 点 P 的轨迹为一条线段

B. 三棱锥 $P\text{-}BEF$ 的体积为定值

C. $|DP|$的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{3}{2}\right]$

D. 直线 D_1P 与 BF 所成角的余弦值的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

11. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点,且 F_1 到渐近线的距离为 1,过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支曲线分别交于 A,B 两点,且 $l\perp AF_1$,则下列说法正确的有 ( )

A. 双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$

B. $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 1

C. $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{BF_1}=10+4\sqrt{6}$

D. $\frac{1}{|AF_2|}+\frac{1}{|BF_2|}=\sqrt{6}+2$

12. 已知 a,b,c 为正实数,下列结论正确的有 ( )

A. $\frac{1}{2}(\log_a b+\log_a c)\leqslant\log_a\frac{b+c}{2}$

B. $\frac{1}{ac}+\frac{a}{b^2c}+bc\geqslant 2\sqrt{2}$

C. $a+b+c\geqslant\sqrt{2ab}+\sqrt{2ac}$

D. $a^2+b^2+c^2\geqslant 2ab+2bc-2ac$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 一个圆的圆周上均匀分布 6 个点,在这些点与圆心共 7 个点中,任取 3 个点,这 3 个点能构成等边三角形的概率为________.

14. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,当向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与向量 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角最大时,向量 $\boldsymbol{b}$ 的模为________.

15. 已知⊙M 过点(1,0),且与直线 $x=-1$ 相切,S 是圆心 M 的轨迹上的动点,T 为直线 $x+y+4=0$ 上的动点,则$|ST|$的最小值为________.

16. 设定义在$(0,+\infty)$上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)\mathrm{e}^{-x}>1$,则函数 $f(x)-\mathrm{e}^x$ 在定义域内是________(填"增"或"减")函数;若 $f(\ln x)\geqslant x+\sqrt{\mathrm{e}}$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\mathrm{e}}$,则 x 的最小值为________.(本小题第一空 2 分,第二空 3 分)

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$,$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_n, n\text{ 为奇数},\\ a_n+\dfrac{1}{2}, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1)记 $b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$,证明:数列$\{b_n\}$为等比数列;

(2)记 $c_n=a_{2n}-\dfrac{1}{2}$,求数列$\{nc_n\}$的前 n 项和 T_n.

18. (12 分)在锐角$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $a\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)=b\sin\dfrac{\pi}{3}$.

(1)求 $\tan\dfrac{A}{4}$;

(2)求$\dfrac{\cos B-\cos C}{\sin B+\sin C}$的取值范围.

19. (12 分)第 31 届世界大学生夏季运动会将于今年在我国成都举行. 某体校田径队正在积极备战,考核设有 100 米、400 米和 1 500 米三个项目,需要选手依次完成考核,成绩合格后的积分分别记为 p_1,p_2 和 p_3($p_i>0$,$i=1,2,3$),总成绩为累计积分和. 考核规定:项目考核逐级进阶,即选手只有在低一级里程项目考核合格后,才能进行下一级较高里程项目的考核,否则考核终止. 对于 100 米和 400 米项目,每个项目选手必须考核 2 次,且全部达标才算合格;对于 1 500 米项目,选手必须考核 3 次,但只要达标 2 次及以上就算合格. 已知选手甲三个项目的达标率依次为 $\frac{4}{5}$,$\frac{3}{4}$,$\frac{2}{3}$,选手乙三个项目的达标率依次为 $\frac{4}{5}$,$\frac{5}{8}$,$\frac{3}{4}$,每次考核是否达标相互独立.

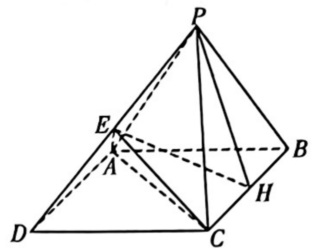
(1)用 ξ 表示选手甲考核积分的总成绩,求 ξ 的分布列和数学期望;

(2)证明:无论 p_1,p_2 和 p_3 取何值,选手甲考核积分总成绩的数学期望值都大于选手乙考核积分总成绩的数学期望值.

20.(12分)如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面是边长为4的菱形,$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,H 为 BC 的中点,$PA=PB=PH=2\sqrt{2}$. E 为 PD 上的一点,且 EH 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(1)证明:平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$;

(2)试确定$\frac{|PE|}{|PD|}$的值,并求出平面 EAC 与平面 PAB 所成二面角的正弦值.



21.(12分)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$A\left(-1,\frac{3}{2}\right)$,过原点的直线与椭圆交于$M,N$两点,点$G$在椭圆上(异于$M,N$),且$k_{GM}\cdot k_{GN}=-\frac{3}{4}$.

(1)求椭圆的标准方程;

(2)若点P为直线$x=4$上的动点,过点P作椭圆的两条切线,切点分别为E,F,求$\tan\angle EPF$的最大值.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=(x^2-1)e^{-x}-a$.

(1)若 $f(x)\geqslant 2e^{-x}$,求 a 的取值范围;

(2)当 $a=-\frac{1}{2}$ 时,记函数 $f(x)$ 的两个零点为 x_1,x_2,求证:$|x_1-x_2|<\frac{3}{2}-\frac{1}{4e}$.