2022 届高考数学精创预测卷 全国甲卷 理科

学校：___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、选择题

1.已知集合 $A=\left\{x \mid x^{2}-3x-4<0\right\}$ ，$B=\{-4,1,3,5\}$ ，则 $A \cap B=(\quad)$

A. $\{-4,1\}$　　B. $\{1,5\}$　　C. $\{3,5\}$　　D. $\{1,3\}$

2.若复数 z 满足 $z \cdot(1+\mathrm{i})=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\mathrm{i}$ ，则 $|z|$ 为(　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

3.关于统计数据的分析，有以下几个结论：

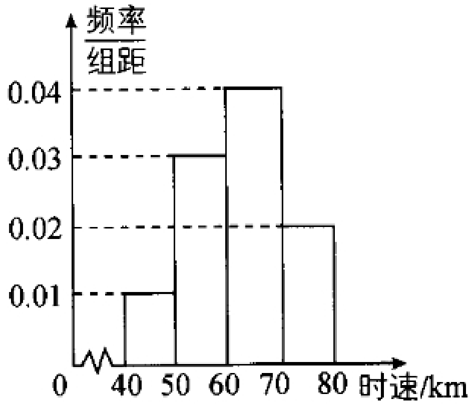
①将一组数据中的每个数据都减去同一个数后，方差没有变化；

②绘制频率分布直方图时，各小矩形的面积等于相应各组的组距；

③一组数据的方差一定是正数；

④如图是随机抽取的 200 辆汽车通过某一段公路时的时速分布直方图，根据这个直方图，可以得到时速在 $[50,60)$ 的汽车大约是 60 辆.

则这四个结论中错误的个数是(　)



A.1　　B.2　　C.3　　D.4

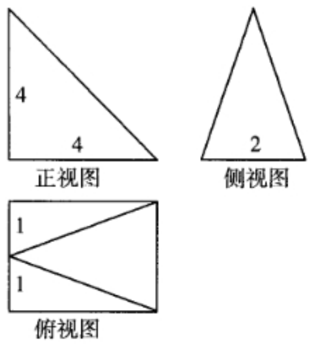
4.一种放射性元素的质量按每年 10%衰减,这种放射性元素的半衰期(剩余质量为最初质量的一半所需的时间叫做半衰期）是（精确到 0.1，已知 $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$ ）(　)

A.5.2 年　　B.6.6 年　　C.7.1 年　　D.8.3 年

5.已知 F 是双曲线 $C: \dfrac{x^{2}}{a^{2}}-\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0, b>0)$ 的右焦点，点 $A(0, \sqrt{3}b)$ ，连接 AF 与渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 交于点 M，$k_{AF} \cdot k_{OM}=-2$ ，则 C 的离心率为(　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

6.某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积是(　)



A. $8+4\sqrt{2}+4\sqrt{17}$　　B. $12+4\sqrt{2}+4\sqrt{17}$

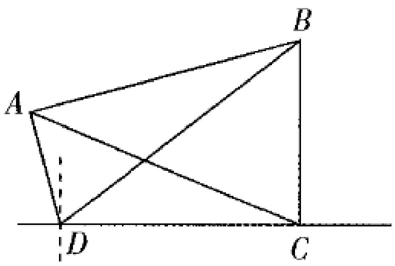
C. $12+8\sqrt{2}+4\sqrt{17}$　　D. $8+4\sqrt{2}+8\sqrt{17}$

7.数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=n^2-n+a$，$n\in\mathbf{N}^*$，则“$a=0$”是“数列$\{a_{2n}\}$为等差数列”的( )

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

8.如图所示，为了测量A，B处岛屿的距离，小明在D处观测，A，B分别在D处的北偏西15°、北偏东45°方向，再往正东方向行驶40海里至C处，观测B在C处的正北方向，A在C处的北偏西60°方向，则A，B两处岛屿间的距离为( )



A. $20\sqrt{6}$海里　　B. $40\sqrt{6}$海里　　C. $20(1+\sqrt{3})$海里　　D.40海里

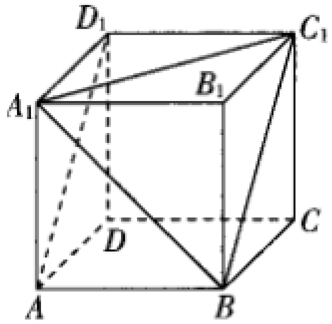
9.已知$\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，则$\cos2\alpha-\sin2\alpha$等于( )

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

10.大学生小明与另外3名大学生一起分配到某乡镇甲、乙、丙3个村的小学进行支教，若每个村的小学至少分配1名大学生，则小明恰好分配到甲村的小学的概率为( )

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

11.已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的表面积为24，则四棱锥$A_1-ABC_1D_1$的体积为( )



A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

12.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，且 $f(x+1)$ 是偶函数， $f(x-1)$ 是奇函数， $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，则( )

A. $f(0)>f(2020)>f(2019)$　　B. $f(0)>f(2019)>f(2020)$

C. $f(2020)>f(2019)>f(0)$　　D. $f(2020)>f(0)>f(2019)$

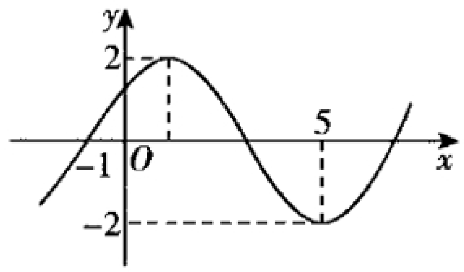
二、填空题

13.已知函数 $f(x)=x^2+2xe^x-1$，则函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为____________.

14.已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1),(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,若 $|\boldsymbol{b}|=4$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为_______.

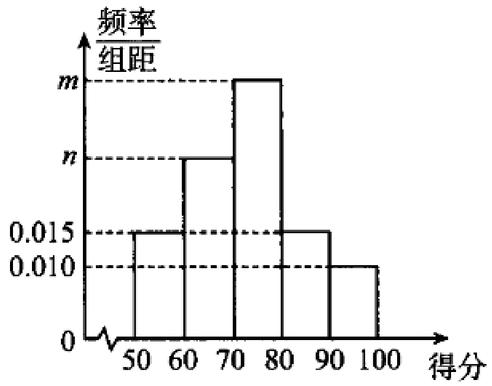
15.已知 F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，点 P 在椭圆上，且 P 到原点 O 的距离等于半焦距，□POF 的面积为 6，则 $b=$____________.

16.若函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图像如图所示，则函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上的单调递增区间为_______.



三、解答题

17.2021 年 5 月 22 日 10 时 40 分，“祝融号”火星车已安全驶离着陆平台，到达火星表面，开始巡视探测.为了增强学生的科技意识，某学校进行了一次专题讲座，讲座结束后，进行了一次专题测试(满分：100 分)，其中理科学生有 600 名学生参与测试，其得分都在 $[50,100]$ 内，得分情况绘制成频率分布直方图如下，在区间 $[60,70),[70,80),[80,90)$ 的频率依次构成等差数列.



若规定得分不低于 80 分者为优秀，文科生有 400 名学生参与测试，其中得分优秀的学生有 50 名.

(1)若以每组数据的中间值代替本组数据，求理科学生得分的平均值；

(2)请根据所给数据完成下面的列联表，并说明是否有 99.9%以上的把握认为，得分是否优秀与文理科有关？

	优秀	不优秀	合计
理科生			
文科生			
合计			1000

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

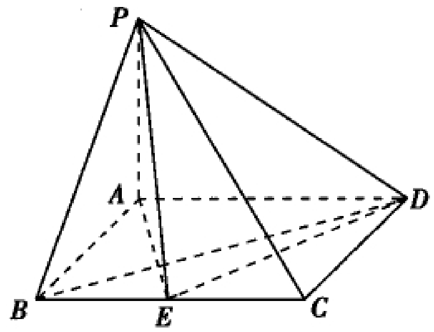
$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

18.已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足$a_1=1$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{4a_n}$，$b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$，$S_n$ 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式；

(2)令$c_n=(-1)^n\dfrac{a_nb_n+n}{S_n}$,求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n .

19.在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$AB=\sqrt{2},AD=2,E$为BC的中点，$PA\perp BC,BD\perp PE$.



(1)证明：$PA \perp$平面$ABCD$；

(2)若PC与平面PAD所成的角为$30°$，求二面角$A-PE-D$的余弦值.

20.已知抛物线$C: y^2=2px(p>1)$上的点$P\left(x_0,1\right)$到其焦点F的距离为$\frac{5}{4}$.

(1)求抛物线C的方程；

(2)点$E(t,4)$在抛物线C上，过点$D(0,2)$的直线l与抛物线C交于$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)\left(y_1>0,y_2>0\right)$两点，点$H$与点$A$关于$x$轴对称，直线$AH$分别与直线$OE$，$OB$交于点$M$，$N$($O$为坐标原点)，求证：$|AM|=|MN|$.

21.已知函数$f(x)=a\mathrm{e}^{-x}+\ln x-1(a\in\mathbf{R})$（$\mathrm{e}\approx 2.71828$为自然对数的底数）.

（1）当$a\leq\mathrm{e}$时，讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）若函数$f(x)$恰有两个极值点x_1，$x_2\left(x_1<x_2\right)$，且$x_1+x_2\leq 2\ln 3$，求$\frac{x_2}{x_1}$的最大值.

22.在平面直角坐标系xOy中，已知直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-1+t\\ y=2+t\end{cases}$($t$为参数)，以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho=-4\cos\theta$.

(1)求直线l的普通方程和曲线C的直角坐标方程；

(2)设直线l与曲线C交于A，B两点，若点P的坐标为$(-1,2)$，求$\left||PA|-|PB|\right|$.

23.已知函数$f(x)=|x-3|+|x+m|(x\in\mathbf{R})$.

(1)当$m=1$时，求不等式$f(x)\geq 6$的解集；

(2)若不等式$f(x)\leq 5$的解集不是空集，求参数m的取值范围.

参考答案

1.答案：D

解析：由 $x^2-3x-4<0$，得 $(x-4)(x+1)<0$，解得 $-1<x<4$，$\therefore A=\{x\mid -1<x<4\}$，又 $\because B=\{-4,1,3,5\}$，$\therefore A\cap B=\{1,3\}$，故选 D.

2.答案：B

解析：$\because z\cdot(1+\mathrm{i})=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\mathrm{i}$，

$\therefore$ 复数 $z=\dfrac{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$\therefore |z|=2$，故选 B.

3.答案：B

解析：对于①，将一组数据中的每个数据都减去同一个数后，方差不变，正确.因为方差反映一组数据的波动大小，整体变化不改变波动大小.

对于②，错误.因为频率分布直方图中，各小矩形的面积等于相应各组的频率.

对于③，错误.因为根据方差的计算公式 $s^2=\dfrac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$ 得出方差是非负数.

对于④，根据频率分布直方图得，时速在 $[50,60)$ 的汽车大约是 $200\times0.03\times10=60$（辆），所以正确.

综上，错误的结论是②③，共 2 个.故选 B.

4.答案：B

解析：设这种放射性元素的半衰期是 x 年，则 $(1-10\%)^x=\dfrac{1}{2}$,化简得 $0.9^x=\dfrac{1}{2}$，即

$x=\log_{0.9}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\lg\frac{1}{2}}{\lg 0.9}=\dfrac{-\lg 2}{2\lg 3-1}\approx\dfrac{-0.3010}{2\times0.4771-1}\approx 6.6$（年）.故选 B.

5.答案：A

解析：由已知得 $F(c,0)$，$\therefore k_{AF}=\dfrac{\sqrt{3}b}{-c}$，$k_{OM}=\dfrac{b}{a}$，$\therefore k_{AF}\cdot k_{OM}=\dfrac{\sqrt{3}b}{-c}\cdot\dfrac{b}{a}=-2$，

$\therefore \sqrt{3}\left(c^2-a^2\right)=2ac$，$\therefore \sqrt{3}e^2-2e-\sqrt{3}=0$，$\therefore e=\sqrt{3}$（舍负），故选 A.

6.答案：B

解析：由三视图可知，该几何体是一个底面为矩形(长为 4、宽为 2)，高为 4 的四棱锥，其中一个侧面与底面垂直，所以该几何体的表面积

$S=2\times4+\dfrac{1}{2}\times2\times4+\dfrac{1}{2}\times2\times4\sqrt{2}+2\times\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{17}=12+4\sqrt{2}+4\sqrt{17}$，故选 B.

7.答案：A

解析：因为$S_n=n^2-n+a$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以$a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\ge 2\end{cases}$，即$a_n=\begin{cases}a,n=1\\2n-2,n\ge 2\end{cases}$，所以$a_{2n}=4n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以无论$a$为何值，数列$\{a_{2n}\}$都为等差数列.所以“$a=0$”是“数列$\{a_{2n}\}$为等差数列”的充分不必要条件，故选A.

8.答案：A

解析：在$\triangle ACD$中，$\angle ADC=15^\circ+90^\circ=105^\circ$，$\angle ACD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，所以$\angle CAD=45^\circ$.由正弦定理可得$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，解得$AD=\dfrac{CD\sin\angle ACD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{40\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=20\sqrt{2}$.在$\mathrm{Rt}\triangle DCB$中，$\angle BDC=45^\circ$，所以$BD=\sqrt{2}CD=40\sqrt{2}$.在$\triangle ABD$中，由余弦定理可得

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB=800+3200-2\times 20\sqrt{2}\times 40\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=2400$，解得$AB=20\sqrt{6}$（海里）.所以$A$，$B$两处岛屿间的距离为$20\sqrt{6}$海里.

9.答案：D

解析：由$\sin\alpha+2\cos\alpha=0$得$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$，

所以$\cos 2\alpha-\sin 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{1-\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{1-4+4}{4+1}=\dfrac{1}{5}$，故选D.

10.答案：C

解析：大学生小明与另外3名大学生一起分配到某乡镇甲、乙、丙3个村的小学进行支教，每个村的小学至少分配1名大学生，基本事件总个数$n=\mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_3^3=36$，小明恰好分配到甲村的小学包含的基本事件个数$m=\mathrm{A}_3^3+\mathrm{C}_3^2\mathrm{A}_2^2=12$，所以小明恰好分配到甲村的小学的概率$P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$.故选C.

11.答案：C

解析：设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，因其表面积为24，所以$6a^2=24$，所以$a=2$.

连接A_1D交AD_1于点O，则$A_1D\perp AD_1$，所以在正方体中，$A_1D\perp$平面ABC_1D_1，即$A_1O\perp$平面ABC_1D_1，所以A_1O是四棱锥$A_1-ABC_1D_1$的高，且$A_1O=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}$.

又$S_{\text{四边形}ABC_1D}=AB\cdot AD_1=4\sqrt{2}$，所以$V_{\text{四棱锥 }A_1-ABC_1D_1}=\dfrac{1}{3}S_{\text{四边形}ABC_1D_1}\cdot A_1O=\dfrac{8}{3}$.故选C.

12.答案：B

解析：由$f(x+1)$是偶函数，得$f(x+1)=f(-x+1)$，即$f(x)=f(-x+2)$.

由$f(x-1)$是奇函数，得$f(x-1)=-f(-x-1)$，即$f(x)=-f(-x-2)$，

所以 $-f(-x-2)=f(-x+2)$，则 $f(x)$ 的周期 $T=8$.

由 $f(x-1)$ 是奇函数，得 $f(0-1)=f(-1)=0$.

因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，所以 $f(0)>0$，

所以 $f(2019)=f(3)=f(-1)=0, f(2020)=f(4)=-f(0)<0$，

即 $f(0)>f(2019)>f(2020)$.

故选 B.

13.答案：$2x-y-1=0$

解析：$\because f'(x)=2x+2e^x+2xe^x$，$f(0)=-1$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线斜率 $k=f'(0)=2$，$\therefore$ 所求的切线方程为 $y-(-1)=2(x-0)$，即 $2x-y-1=0$.

14.答案：135°

解析：由向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$ 知 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$.又 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}^2=-2\times2=-4,\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{2}\times4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\therefore$ 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 135°.

15.答案：$2\sqrt{3}$

解析：设 $P(x,y)$，则 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, ① \\ x^2+y^2=c^2, ②\end{cases}$

由②得 $x^2=c^2-y^2$，代入①式得

$\dfrac{c^2-y^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=\dfrac{b^4}{c^2}\Rightarrow|y|=\dfrac{b^2}{c}$.

$\therefore S_{\triangle POF}=\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|y|=\dfrac{1}{2}\times c\times\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{1}{2}b^2=6$，

$\therefore b^2=12$，又 $b>0$，

$\therefore b=2\sqrt{3}$.

16.答案：$[-3,0]$

解析：由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图像，可得 $A=2$，$\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2\pi}{\omega}=5+1$，求得 $\omega=\dfrac{\pi}{4}$.再根据五点作图法可得，$\dfrac{\pi}{4}\times(-1)+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.又 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore f(x)=2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}\le2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $8k-3\le x\le8k+1$，$k\in\mathbf{Z}$，故函数的增区间为 $[8k-3,8k+1]$，$k\in\mathbf{Z}$.再根据 $x\in[-\pi,0]$，可得增区间为 $[-3,0]$.

17.答案：(1)理科学生得分的平均值为 73 分.

(2)表格见解析，有 99.9%以上的把握认为得分是否优秀与文理科有关.

解析：(1)由第三、二、四组的频率依次构成等差数列可得 $2n=m+0.015$.

又频率分布直方图中所有小矩形面积之和为 1，则 $(0.015+n+m+0.015+0.010)\times 10=1$，

解得 $m=0.035, n=0.025$，

$\therefore$ 理科学生得分的平均值为 $(55\times 0.015+65\times 0.025+75\times 0.035+85\times 0.015+95\times 0.010)\times 10=73$ (分).

(2)理科学生优秀的人数为 $(0.015+0.010)\times 10\times 600=150$，

$\therefore$ 补全 2×2 列联表如表所示，

	优秀	不优秀	合计
理科生	150	450	600
文科生	50	350	400
合计	200	800	1000

$K^2=\dfrac{1000\times(150\times 350-450\times 50)^2}{600\times 400\times 200\times 800}=23.4375>10.828$，

$\therefore$ 有 99.9%以上的把握认为得分是否优秀与文理科有关.

18.答案：(1) $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$； $b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$.

(2) $T_n=-1+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$.

解析：(1)由题可知， $b_1=\dfrac{2}{2a_1-1}=\dfrac{2}{2-1}=2$，

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2}{2a_{n+1}-1}-\frac{2}{2a_n-1}=\frac{2}{2-\frac{1}{2a_n}-1}-\frac{2}{2a_n-1}=2,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2，公差为 2 的等差数列，

所以 $b_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

由 $b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$ 得 $a_n=\dfrac{b_n+2}{2b_n}=\dfrac{2n+2}{4n}=\dfrac{n+1}{2n}$.

(2)由(1)得 $S_n=\dfrac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$，

所以 $c_n=(-1)^n\dfrac{a_nb_n+n}{S_n}=(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$.

所以 $T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$

$$=-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$=-1+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$.

19.答案：(1)证明过程见解析.

(2)余弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

解析：(1)证明：易知$\tan\angle BAE=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\tan\angle ABD=\sqrt{2}$，

所以$1-\tan\angle BAE\cdot\tan\angle ABD=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=0$，

故$\angle BAE+\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}$，即$AE\perp BD$，

又$BD\perp PE$，$PE\cap AE=E$，

所以$BD\perp$平面PAE，又$PA\subset$平面PAE，

所以$BD\perp PA$，又$PA\perp BC,BD\cap BC=B$，

所以$PA\perp$平面$ABCD$.

（2）由$PA\perp$平面$ABCD$，得$PA\perp CD$，又$CD\perp AD,PA\cap AD=A$，

所以$CD\perp$平面PAD，

所以$\angle CPD$为PC与平面PAD所成的角，则$\angle CPD=30^\circ$，

在$Rt\triangle CPD$中，$CD=\sqrt{2}$，$\angle CPD=30^\circ$，所以$PD=\sqrt{6}$，又$PA\perp AD$，

所以$PA=\sqrt{(\sqrt{6})^2-2^2}=\sqrt{2}$.

以A为原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$的方向分别为$x$轴、$y$轴、$z$轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

则$B(\sqrt{2},0,0),D(0,2,0),E(\sqrt{2},1,0),P(0,0,\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{DP}=(0,-2,\sqrt{2}),\overrightarrow{DE}=(\sqrt{2},-1,0)$，

设平面PDE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=-2y+\sqrt{2}z=0,\\ \overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{2}x-y=0,\end{cases}$

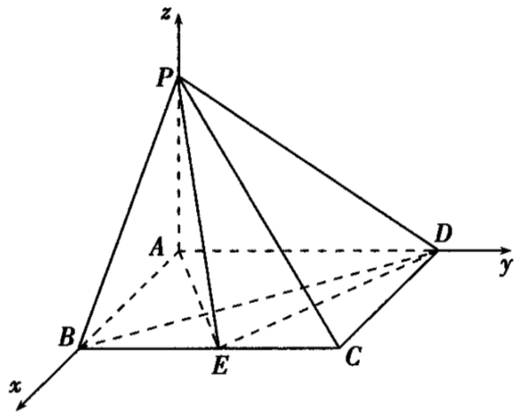
取$x=1$，则$y=\sqrt{2},z=2$，所以$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{2},2)$，

易知平面PAE的一个法向量为$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},2,0)$，

所以$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$，

由图可知二面角$A-PE-D$为锐角，

所以二面角 $A-PE-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{21}$.



20.答案：(1)方程为 $y^2=4x$.

(2)证明过程见解析.

解析：(1)由点 $P\left(x_0,1\right)$ 在抛物线上可得，$1^2=2px_0$，解得 $x_0=\frac{1}{2p}$.

由抛物线的定义可得 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}=\frac{1}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}$，

整理得 $2p^2-5p+2=0$，解得 $p=2$ 或 $p=\frac{1}{2}$(舍去).

故抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)由 $E(t,4)$ 在抛物线 C 上可得 $4^2=4t$，解得 $t=4$，

所以 $E(4,4)$，直线 OE 的方程为 $y=x$.

易知 $H\left(x_1,-y_1\right)$，x_1,x_2 均不为 0.

由题意知直线 l 的斜率存在且大于 0，

设直线 l 的方程为 $y=kx+2(k>0)$，

联立，得 $\begin{cases}y=kx+2,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2+(4k-4)x+4=0$.

则 $\Delta=(4k-4)^2-16k^2=16-32k>0$，得 $0<k<\frac{1}{2}$，

所以 $x_1+x_2=\frac{4-4k}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{4}{k^2}$.

由直线 OE 的方程为 $y=x$，得 $M\left(x_1,x_1\right)$.

易知直线 OB 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2}$，故 $N\left(x_1,\frac{x_1y_2}{x_2}\right)$.

数形结合可知，要证 $|AM|=|MN|$，

即证 $2y_M = y_1 + y_N$，

即证 $\frac{x_1 y_2}{x_2} + y_1 = 2x_1$，即证 $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 2x_1 x_2$，

即证 $(2k-2)x_1 x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 0$，

则 $(2k-2) \times \frac{4}{k^2} + \frac{8-8k}{k^2} = 0$，此等式显然成立，所以 $|AM| = |MN|$.

21.答案：（1）当 $a \le \mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

（2）$\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值为 3

解析：（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x) = -a\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - ax}{x\mathrm{e}^x}$，

（下面分 $a \le 0$ 及 $0 < a \le \mathrm{e}$ 讨论导函数 $f'(x)$ 的正负）

当 $a \le 0$ 时，$f'(x) > 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $0 < a \le \mathrm{e}$ 时，令 $g(x) = \mathrm{e}^x - ax$，$g'(x) = \mathrm{e}^x - a$，

当 $0 < a \le 1$ 时，$g'(x) > 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$g(x) > g(0) = 1$.

所以 $f'(x) > 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $1 < a \le \mathrm{e}$ 时，

当 $0 < x < \ln a$ 时，$g'(x) < 0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x > \ln a$ 时，$g'(x) > 0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x) \ge g(\ln a) = \mathrm{e}^{\ln a} - a\ln a = a(1-\ln a) \ge 0$，

$\therefore f'(x) \ge 0$（等号不恒成立），$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a \le \mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

（2）依题意，得 $f'\left(x_1\right) = f'\left(x_2\right) = 0$，

则 $\begin{cases} \mathrm{e}^{x_1} - ax_1 = 0, \\ \mathrm{e}^{x_2} - ax_2 = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \mathrm{e}^{x_1} = ax_1, \\ \mathrm{e}^{x_2} = ax_2, \end{cases}$

两式相除得，$\mathrm{e}^{x_2 - x_1} = \frac{x_2}{x_1}$，设 $\frac{x_2}{x_1} = t$，

则 $t > 1$，$x_2 = tx_1$，$\mathrm{e}^{(t-1)x_1} = t$，

$\therefore x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$，$x_2 = \frac{t\ln t}{t-1}$，

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{(t+1)\ln t}{t-1}$.

（利用比值代换 $\frac{x_2}{x_1} = t$，则有 $x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$，$x_2 = \frac{t\ln t}{t-1}$，$x_1 + x_2 = \frac{(t+1)\ln t}{t-1}$，从而将双变量问题变为单变量问题来解决）

设 $h(t)=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}(t>1)$，则 $h'(t)=\dfrac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$.

（构造函数并利用导数研究函数的最值即可）

设 $\varphi(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$，则 $\varphi'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}>0$，

$\therefore \varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，此时 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$.

$\therefore h'(t)>0$，则 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $x_1+x_2\le 2\ln 3$，即 $h(t)\le 2\ln 3$，而 $h(3)=2\ln 3$，

$\therefore t\in(1,3]$，即 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 的最大值为 3.

22.答案：(1)直线 l 的普通方程为 $x-y+3=0$

曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2+4x=0$

(2) $\sqrt{14}$

解析：(1)直线 l 的参数方程，消去参数 t，得直线 l 的普通方程为 $x-y+3=0$，

由曲线 C 的极坐标方程 $\rho=-4\cos\theta$，得 $\rho^2=-4\rho\cos\theta$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2+4x=0$.

(2)直线 l 的参数方程可写为 $\begin{cases}x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，代入 $x^2+y^2+4x=0$，

得 $t^2+3\sqrt{2}t+1=0$，设 A，B 两点的参数为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=-3\sqrt{2},t_1t_2=1$.

所以 $\left||PA|-|PB|\right|=\left||t_1|-|t_2|\right|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{18-4}=\sqrt{14}$.

23.答案：(1) $f(x)\ge 6$ 的解集为 $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$

(2) $-8\le m\le 2$

解析：(1)由题设，$f(x)=|x-3|+|x+1|\ge 6$，

当 $x\le -1$ 时，$f(x)=3-x-x-1=2-2x\ge 6$，可得 $x\le -2$，

当 $-1<x\le 3$ 时，$f(x)=3-x+x+1=4<6$，无解，

当 $x>3$ 时，$f(x)=x-3+x+1=2x-2\ge 6$，可得 $x\ge 4$.

综上，$f(x)\ge 6$ 的解集为 $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$.

(2) $f(x)=|x-3|+|x+m|\ge|(x-3)-(x+m)|=|m+3|$，

$\therefore$ 要使 $f(x)\le 5$ 的解集不是空集，只需 $|m+3|\le 5$ 即可，

$\therefore -8\le m\le 2$.