2022届高考数学精创预测卷 全国乙卷 理科

学校:___________姓名:___________班级:___________考号:___________

一、选择题

1.已知 $a\in\mathbf{R}$，若 $a-1+(a-2)\mathrm{i}$（i为虚数单位）是实数，则 $a=(\quad)$

A.1　　B.-1　　C.2　　D.-2

2.设集合 $A=\left\{x\mid x^{2}-4x+3<0\right\}$，$B=\{x\mid 2x-3>0\}$，则 $A\cap B=(\quad)$

A.$\left\{x\mid -3<x<-\dfrac{3}{2}\right\}$　　B.$\left\{x\mid -3<x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　C.$\left\{x\mid 1<x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　D.$\left\{x\mid \dfrac{3}{2}<x<3\right\}$

3.命题"$\forall 1\le x\le 2$，$x^{2}-a\le 0$"为真命题的一个充分不必要条件是$(\quad)$

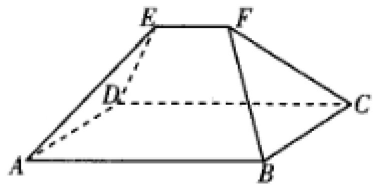
A.$a\ge 4$　　B.$a\ge 5$　　C.$a\le 4$　　D.$a\le 5$

4.已知偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，且 $f(4)=0$，则不等式 $(x+1)f(x)>0$ 的解集为$(\quad)$

A.$(-4,-1)\cup(4,+\infty)$　　B.$(-\infty,-4)\cup(-1,4)$

C.$(-4,-1)\cup(-1,4)$　　D.$(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

5.《九章算术》是我国古代的一部数学专著，书中记载了一种名为"刍甍"的五面体（如图），四边形 $ABCD$ 为矩形，$EF//AB$.若 $AB=3EF$,$\triangle ADE$ 和$\triangle BCF$ 都是正三角形，且 $AD=2EF$，则异面直线 AE 与 CF 所成角的大小为$(\quad)$

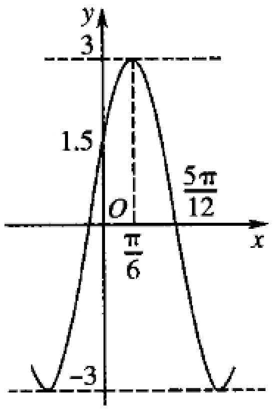


A.$\dfrac{\pi}{6}$　　B.$\dfrac{\pi}{4}$　　C.$\dfrac{\pi}{3}$　　D.$\dfrac{\pi}{2}$

6.现有一圆桌，周边有标号为1，2，3，4的四个座位，甲、乙、丙、丁四位同学坐在一起探讨一个数学课题，每人只能坐一个座位，甲先选座位，且甲、乙不能相邻，则所有选座方法有$(\quad)$

A.6种　　B.8种　　C.12种　　D.16种

7.函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，若把 $f(x)$ 的图象向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)=A\cos(\omega x+2\varphi)$ 的图象，则m的值可能为$(\quad)$



A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

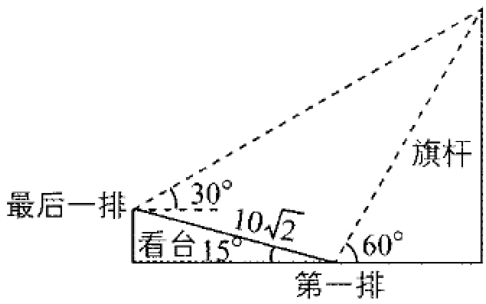
8.已知实数x，y满足不等式组$\begin{cases}2x+y-5\geq 0\\x+2y-7\leq 0\\x-y-1\leq 0\end{cases}$，若$(x-1)^2+(y-1)^2$的最大值为$m$，最小值为$n$，则

$m-n=$(　)

A.4　　B. $\dfrac{21}{5}$　　C. $\sqrt{5}-1$　　D. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

9.中华人民共和国国歌有84个字，37小节，奏唱需要46秒，某校周一举行升旗仪式，旗杆正好处在坡度15°的看台的某一列的正前方，从这一列的第一排和最后一排测得旗杆顶部的仰角分别为60°和30°，第一排和最后一排的距离为$10\sqrt{2}$

米（如图所示），旗杆底部与第一排在同一个水平面上.要使国歌结束时国旗刚好升到旗杆顶部，升旗手升旗的速度应为(　)



A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{23}$（米/秒）　　B. $\dfrac{5\sqrt{3}}{23}$（米/秒）　　C. $\dfrac{7\sqrt{3}}{23}$（米/秒）　　D. $\dfrac{8\sqrt{3}}{23}$（米/秒）

10.若$x=-2$是函数$f(x)=\left(x^2+ax-1\right)\mathrm{e}^{x-1}$的极值点，则$f(x)=\left(x^2+ax-1\right)\mathrm{e}^{x-1}$的极小值为(　)

A.-1　　B. $-2\mathrm{e}^{-3}$　　C. $5\mathrm{e}^{-3}$　　D.1

11.过椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

的左焦点F的直线交C于第一象限内的一点P，且该直线斜率为C的离心率，A为C的右顶点，过P点作x轴的垂线，垂足为Q，若 $2\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{QA}$ 且 $\triangle PQF$ 的面积为 $\dfrac{b^2}{6}$，则C的离心率为( )

A. $\sqrt{5}-2$　　B. $\sqrt{6}-2$

C. $\sqrt{7}-2$　　D. $2\sqrt{2}-2$

12.已知 $f(x)=\left(6m-\dfrac{2}{m}\right)x^m$ 是幂函数，且对于 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)\left(x_1\neq x_2\right)$ 均有

$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$.若 $a=f\left(\log_{0.2}3\right)$，$b=f\left(\log_3 0.2\right)$，$c=f\left(0.2^{-3}\right)$，则( )

A. $c<a<b$　　B. $a<c<b$　　C. $a<b<c$　　D. $c<b<a$

二、填空题

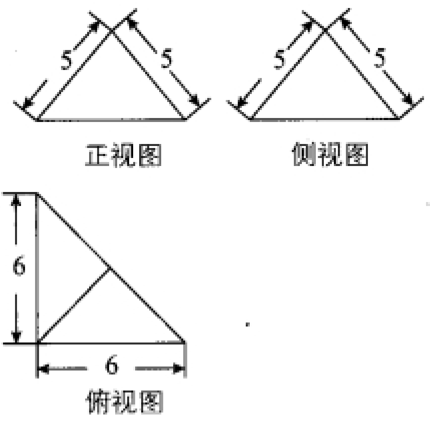
13.若直线 $\sqrt{3}x-y=0$ 为双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线，则b的值为___________.

14.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-4,m)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，且 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$___________.

15.在$\triangle ABC$ 中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.已知三角形的面积是 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4}$，且

$a^2=(b-c)^2+4$，则$\triangle ABC$ 的面积是__________.

16.某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则该几何体所有棱长之和（单位：cm）为_________.



三、解答题

17.随科技创新方面的发展，我国高新技术专利申请数也日益增加，2015年到2019年我国高新技术专利申请数的数据如表所示(把2015年到2019年分别用编号1到5来表示).

年份编号x	1	2	3	4	5
专利申请数y(万件)	1.6	1.9	2.2	2.6	3.0

(1)求高新技术专利申请数y关于年份编号x的回归方程；

(2)由此线性回归方程预测2022年我国高新技术专利申请数.

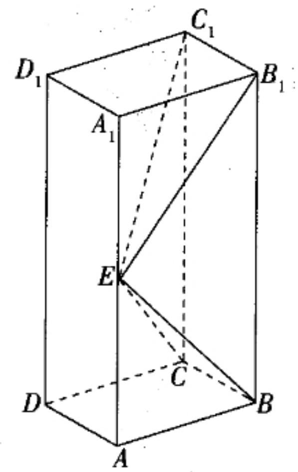
附：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x},\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=37.4$.

18.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=3$，$(n-1)S_n=nS_{n-1}+n^2-n\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n；

（2）令$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

19.如图，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面$ABCD$是正方形，点E在棱AA_1上，$BE\perp EC_1$.



（1）证明：$BE\perp$平面EB_1C_1；

（2）若$AE=A_1E$，求二面角$B-EC-C_1$的正弦值.

20.已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$（其中$\mathrm{e}=2.71828\cdots$为自然对数的底数）.

（1）求证：当$x\in[-1,+\infty)$时，$f(x)>-\dfrac{1}{2}$；

（2）若不等式$f(x)\geq ax+1$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，求实数a的值.

21.已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，$M(m,-2)$为抛物线上一点，$|MF|=2$.

(1)求抛物线C的标准方程；

(2)过M的两直线交抛物线于A，B，且$\angle AMB$的平分线平行于y轴，试判断$\triangle AMB$的面积是否有最大值？若有，求出最大值；若没有，说明理由.

22.选修4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系xOy中，l的参数方程为$\begin{cases} x = 4 - \dfrac{1}{2}t, \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$

(t为参数).以坐标原点为极点，x轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线C的极坐标方程为

$\rho^2 = 6\rho\cos\theta - 5$.

(1)求C的直角坐标方程和l的极坐标方程；

(2)设点$M(4,0)$，直线l与C交于A，B两点.求$\dfrac{|MA|\cdot|MB|}{|AB|^2}$.

23.选修4-5：不等式选讲

已知函数$f(x) = |x+m| + |x-3|$.

(1)若$m=1$，求$f(x)-5 \le 0$的解集；

(2)若$f(x) \le \left|a^2-6\right| + |x+m| - |x+1|$恒成立，求实数$a$的取值范围.

参考答案

1.答案：C

解析：若 $a-1+(a-2)\mathrm{i}$ 为实数，则 $a-2=0$，得 $a=2$.故选C.

2.答案：D

解析：由题意得集合 $A=\{x\mid 1<x<3\}$，$B=\left\{x\mid x>\dfrac{3}{2}\right\}$，所以 $A\cap B=\left\{x\mid \dfrac{3}{2}<x<3\right\}$，故选D.

3.答案：B

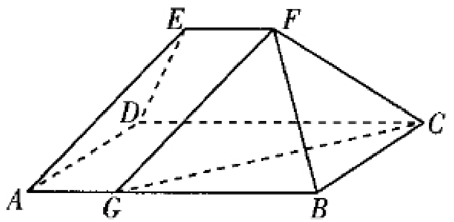
解析：因为命题“$\forall 1\le x\le 2$，$x^2-a\le 0$”是真命题，所以 $\forall 1\le x\le 2$，$a\ge x^2$ 恒成立，所以 $a\ge 4$，结合选项，命题是真命题的一个充分不必要条件是 $a\ge 5$.故选B.

4.答案：A

解析：若 $x+1<0$，则 $(x+1)f(x)>0$ 等价于 $f(x)<0$，$\because f(-4)=f(4)=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$\therefore f(x)<0$ 有 $-4<x<0$，由上 $-4<x<-1$，若 $x+1>0$，则 $(x+1)f(x)>0$ 等价于 $f(x)>0$，由偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)>0$，即得 $x>4$，综上，$(x+1)f(x)>0$ 的解集为 $(-4,-1)\cup(4,+\infty)$.故选：A.

5.答案：D

解析：如图，在平面 $ABFE$ 中，过 F 作 $FG//AE$ 交 AB 于 G，连接 CG，则 $\angle CFG$ 为异面直线 AE 与 CF 所成的角或其补角.设 $EF=1$，则 $AB=3$，$BC=CF=AE=2$.因为 $EF//AB$，所以四边形 $AEFG$ 为平行四边形，所以 $FG=AE=2$，$AG=1$，$BG=2$，所以 $GC=\sqrt{BG^2+BC^2}=2\sqrt{2}$，所以 $CG^2=GF^2+CF^2$，所以 $\angle CFG=\dfrac{\pi}{2}$，故选D.



6.答案：B

解析：先安排甲，其选座方法有 C_4^1 种，由于甲、乙不能相邻，所以乙只能坐甲对面，而丙、丁两位同学坐另两个位置的坐法有 A_2^2 种，所以共有坐法种数为 $\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{A}_2^2=4\times 2=8$ 种.

故选：B.

7.答案：C

解析：由题意可知：$A=3,\dfrac{T}{4}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore T=\pi,\therefore \omega=2$.

Q $f(0)=3\sin\varphi=1.5$ 且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}$， $\therefore f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

把函数 $f(x)$ 的图象向左平移m个单位长度得 $g(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+2m\right)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

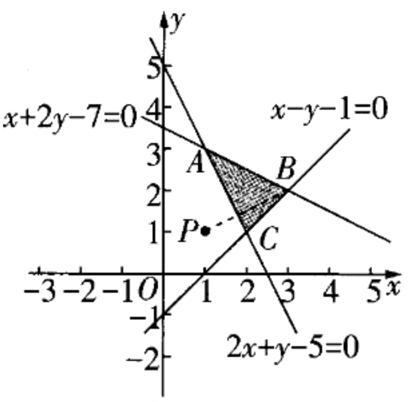
$\therefore 2m-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \boldsymbol{Z})$， $\therefore m=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in \boldsymbol{Z})$.

当 $k=0$ 时， $m=\frac{\pi}{3}$，故选C.

8.答案：B

解析：作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，可得 $A(1,3),B(3,2),C(2,1)$.

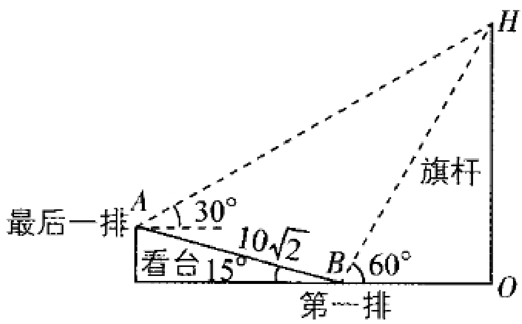
设 $P(1,1)$，则数形结合可知 $m=|PB|^2=5,\left(d_{P-AC}\right)^2=\frac{4}{5}$ (d_{P-AC} 为点P到直线 $2x+y-5=0$ 的距离)，故 $m-n=\frac{21}{5}$，选B.



9.答案：B

解析：如图，由题得 $\angle HAB=45°$， $\angle HBA=105°$， $\therefore \angle AHB=30°$.在 $\triangle HAB$ 中，由正弦定理得 $\frac{HB}{\sin\angle HAB}=\frac{AB}{\sin\angle AHB}$，即 $\frac{HB}{\sin 45°}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin 30°}$，解得 $HB=20$，则在 $\triangle BHD$ 中，

$OH=HB\sin\angle HBO=20\sin 60°=10\sqrt{3}$，所以升旗的速度应为 $\frac{10\sqrt{3}}{46}=\frac{5\sqrt{3}}{23}$ （米/秒）.故选B.



10.答案：A

解析：因为 $f'(x)=\left[x^2+(a+2)x+a--1\right]\mathrm{e}^{x-1}$， $f'(-2)=0$，所以 $a=-1$，所以 $f(x)=\left(x^2-x-1\right)\mathrm{e}^{x-1}$， $f'(x)=\left(x^2+x-2\right)\mathrm{e}^{x-1}$.令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=1$，所以当 $x\in(-\infty,-2)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增；当 $x\in(-2,1)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-1-1)\mathrm{e}^{1-1}=-1$.

11.答案：C

解析：设 $P(x,y),F(-c,0),A(a,0)$，

则 $Q(x,0),c=\sqrt{a^2-b^2}$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}$，直线l的方程为 $y=e(x+c)$.

又 $2\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{QA}$，则 $x=\dfrac{a-2c}{3}$， $\therefore y=\dfrac{e(a+c)}{3}$，

$\therefore S_{\triangle PQF}=\dfrac{1}{2}|QF|y=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a+c}{3}\times\dfrac{e(a+c)}{3}=\dfrac{e(a+c)^2}{18}=\dfrac{b^2}{6}=\dfrac{a^2-c^2}{6}$，

$\therefore e(a+c)=3(a-c)$.

又 $e=\dfrac{c}{a}$， $\therefore c=ea$， $\therefore e(a+ea)=3(a-ea)$， $\therefore e^2+e=3-3e$，

即 $e^2+4e-3=0$，解得 $e=-2\pm\sqrt{7}$.

$\because e\in(0,1)$， $\therefore e=\sqrt{7}-2$，故选C.

12.答案：C

解析：因为 $f(x)=\left(6m-\dfrac{2}{m}\right)x^m$ 是幂函数，所以 $6m-\dfrac{2}{m}=1$，即 $6m^2-m-2=0$，

解得 $m=-\dfrac{1}{2}$ 或 $m=\dfrac{2}{3}$，可得 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 或 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$.

因为对于 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)\left(x_1\neq x_2\right)$ 均有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，

所以 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，且 $f(x)$ 是偶函数， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $a=f\left(\log_{0.2}3\right)=f\left(\log_{0.2}3^{-1}\right)$， $b=f\left(\log_3 0.2\right)=f\left(\log_3 0.2^{-1}\right)$， $c=f\left(0.2^{-3}\right)$，

$0<\log_{0.2}3^{-1}<1$， $1<\log_3 0.2^{-1}<\log_3 9=2$， $0.2^{-3}>2$，所以 $a<b<c$，故选C.

13.答案： $\sqrt{3}$

解析：因为直线 $\sqrt{3}x-y=0$ 为双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线，所以 $\dfrac{b}{1}=\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{3}$.

14.答案：-7

解析：$\because \boldsymbol{a}=(-4,m)$， $\boldsymbol{b}=(1,-2)$， $\therefore \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-4,m)-(2,-4)=(-6,m+4)$.$\because (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp \boldsymbol{b}$，

$\therefore (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{b}=0$， $\therefore -6\times 1+(m+4)\times(-2)=0$，解得 $m=-7$.

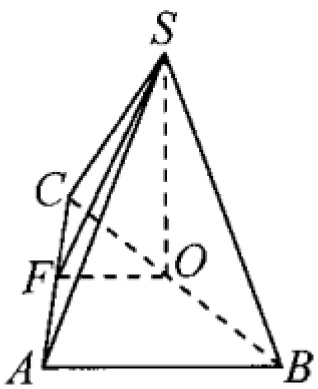
15.答案： $1+\sqrt{2}$

解析：因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，所以 $\dfrac{2bc\cos A}{4}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，所以 $\sin A=\cos A$，所以 $\tan A=1$.因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{4}$.因为 $a^2=(b-c)^2+4$，所以 $bc=4+2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=1+\sqrt{2}$.

16.答案： $3\sqrt{34}+6\sqrt{2}+12$

解析：本题考查由三视图还原几何体.由三视图知该几何体是一个底面为等腰直角三角形的三棱锥，如图中三棱锥 $S-ABC$ 所示，取F为AC的中点，O为BC的中点，连接SO，OF，SF，则 $SO\perp$ 平面ABC.由三视图可知 $AB=AC=6,SF=5,$ 则 $BC=6\sqrt{2},SA=SB=SC=\sqrt{5^2+\left(\dfrac{6}{2}\right)^2}=\sqrt{34},$

所以该几何体所有棱长之和为 $3\sqrt{34}+6\sqrt{2}+12$.



17.答案：(1)回归方程为 $\hat{y}=0.35x+1.21$.

(2)2022年我国高新技术专利数为4.01万件.

解析：(1)由已知可得 $\overline{x}=3,\overline{y}=2.26$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=15,\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=11.3,\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=37.4$，

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\frac{37.4-33.9}{55-45}=0.35，$$

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=1.21$，

所以回归方程为 $\hat{y}=0.35x+1.21$.

(2)由(1)知 $\hat{y}=0.35x+1.21$.

又2022年对应的是编号8，

所以2022年我国高新技术专利申请数 $y=0.35\times 8+1.21=4.01$ (万件)，

即可以预测2022年我国高新技术专利数为4.01万件.

18.答案：（1）由 $\left(n-1\right)S_n=nS_{n-1}+n^2-n\left(n\geq 2,n\in \mathbf{N}^*\right)$，得 $\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=1$.

又 $\dfrac{S_1}{1}=3$，所以数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为3，公差为1的等差数列，

所以 $\dfrac{S_n}{n}=3+\left(n-1\right)=n+2$，即 $S_n=n^2+2n$.

（2）当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-\left(n-1\right)^2-2\left(n-1\right)=2n+1$，

又 $a_1=3$ 也符合上式，所以 $a_n=2n+1\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，所以 $b_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$，

所以 $T_n=\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n+1}{2^n}$，①

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$，②

①-②，得 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{2}{2^n}-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$

$=\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$

$=\dfrac{5}{2}-\dfrac{2n+5}{2^{n+1}}$，

故 $T_n=5-\dfrac{2n+5}{2^n}$.

解析：

19.答案：（1）证明：由已知得，$B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，$BE\subset$ 平面 ABB_1A_1，

故 $B_1C_1\perp BE$.

又 $BE\perp EC_1$，$EC_1\cap B_1C_1=C_1$，

所以 $BE\perp$ 平面 EB_1C_1.

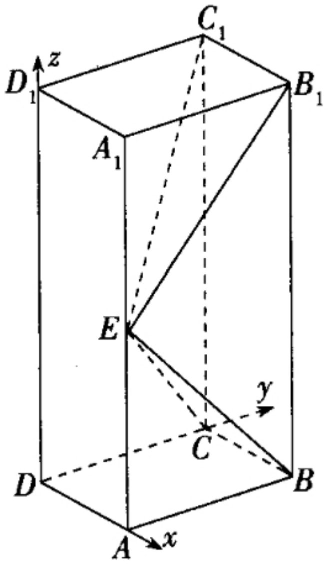
（2）由（1）知 $\angle BEB_1=90^\circ$.

由题设知 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong \mathrm{Rt}\triangle A_1B_1E$，

所以 $\angle AEB=45^\circ$，故 $AE=AB$，$AA_1=2AB$.

以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向，$|\overrightarrow{DA}|$

为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系$Dxyz$，



则$C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$C_1(0,1,2)$，$E(1,0,1)$，所以$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$.

设平面EBC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=0,\\ x-y+z=0,\end{cases}$

所以可取$\boldsymbol{n}=(0,-1,-1)$.

设平面ECC_1的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2z_1=0,\\ x_1-y_1+z_1=0,\end{cases}$

所以可取$\boldsymbol{m}=(1,1,0)$.

于是$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=-\dfrac{1}{2}$.

所以二面角$B-EC-C_1$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

解析：

20.答案：（1）见解析

（2）实数a的值为2

解析：（1）$f'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x$，

当$x\in[-1,0]$时，$\mathrm{e}^x>0$，$\cos x>0$，则$f'(x)>0$；

当$x\in(0,+\infty)$时，$\mathrm{e}^x>1$，$-1\le\cos x\le1$，则$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$在$[-1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore f(x) \geq f(-1) = \frac{1}{e} - \sin 1 > \frac{1}{e} - \frac{\sqrt{3}}{2}$，

而$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} < \frac{1}{2.73} < \frac{1}{e}$，

$\therefore \frac{1}{e} - \frac{\sqrt{3}}{2} > -\frac{1}{2}$，$\therefore f(x) > -\frac{1}{2}$.

（2）令$g(x) = f(x) - ax - 1 = e^x + \sin x - ax - 1$，则$g(x) \geq 0$对任意$x \in \mathbf{R}$恒成立，

若$a \leq 0$，则$g(-\pi) = \frac{1}{e^{\pi}} + a\pi - 1 < 0$，与题意不符.

故只需考虑$a > 0$时的情况，$g(0) = 0$，$g'(x) = e^x + \cos x - a$，$g'(0) = 2 - a$，令$h(x) = e^x + \cos x - a$，则$h'(x) = e^x - \sin x$，显然当$x > 0$时，$h'(x) = e^x - \sin x > 0$，

故$g'(x)$在$[0, +\infty)$上单调递增，

①当$a > 2$时，则$g'(0) < 0$，$g'(\ln(a+1)) = a + 1 + \cos[\ln(a+1)] - a = 1 + \cos[\ln(a+1)] \geq 0$，故存在$x_0 \in (0, \ln(a+1)]$，使得$g'\left(x_0\right) = 0$，且当$x \in \left(0, x_0\right)$时，$g(x)$单调递减，

$\therefore g\left(x_0\right) < g(0) = 0$，与题意不符；

②当$0 < a < 2$时，则$g'(0) > 0$，当$-\pi < x < 0$时，$e^x > 0$，$\sin x < 0$，

故$h'(x) > 0$，$g'(x)$在$(-\pi, 0)$上单调递增.又$g'(-\pi) = e^{-\pi} - 1 - a < 0$，故存在$x_1 \in (-\pi, 0)$，使得$g'\left(x_1\right) = 0$，$\therefore$当$x \in \left(x_1, 0\right)$时，$g(x)$单调递增，$\therefore g\left(x_1\right) < g(0) = 0$，与题意不符；

③当$a = 2$时，则$g'(0) = 0$，当$x < 0$时，$g'(x) = e^x + \cos x - 2 < \cos x - 1 \leq 0$，当$x > 0$时，$g'(x) > g'(0) = 0$，故$g(x)$在$(-\infty, 0)$上单调递减，在$(0, +\infty)$上单调递增，

$\therefore g(x) \geq g(0) = 0$恒成立.

综上，实数a的值为2.

21.答案：(1)标准方程为$y^2 = 4x$.

(2)有最大值，最大值为6.

解析：(1)因为$M(m, -2)$为抛物线$C: y^2 = 2px(p > 0)$上一点，

所以$m = \frac{4}{2p} = \frac{2}{p}$.

因为$|MF| = 2$，

所以$2 = m + \frac{p}{2}$，即$\frac{2}{p} + \frac{p}{2} = 2$，

解得$p = 2$，

所以抛物线C的标准方程为$y^2 = 4x$.

(2)由(1)得，$M(1,-2)$.

设$A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right),B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$.

因为$\angle AMB$的平分线平行于y轴，

所以$k_{MA}=-k_{MB}$，

得$\frac{y_1+2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=-\frac{y_2+2}{\frac{y_2^2}{4}-1}$，

即$\frac{y_1+2}{(y_1+2)(y_1-2)}=-\frac{y_2+2}{(y_2+2)(y_2-2)}$，

整理得$y_1+y_2=4$，

所以$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=1$.

设直线$l_{AB}:y-y_1=x-\frac{y_1^2}{4}$，

即$x-y+y_1-\frac{y_1^2}{4}=0$，

点M到直线l_{AB}的距离$d=\frac{\left|3+y_1-\frac{y_1^2}{4}\right|}{\sqrt{2}}$，

$|AB|=\sqrt{2}\left|\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}\right|=\sqrt{2}|y_2-y_1|=2\sqrt{2}|2-y_1|$，

所以$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left|3+y_1-\frac{y_1^2}{4}\right|}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}|2-y_1|=\frac{1}{4}|(y_1-2)^2-16||y_1-2|$.

令$y_1-2=t$，由$y_1+y_2=4$，

$y_1\geq 0,y_2\geq 0$得$-2\leq t\leq 2$，

所以$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{4}\left|t^3-16t\right|$.

因为$f(t)=\frac{1}{4}\left|t^3-16t\right|$是偶函数，

所以只需讨论$0\leq t\leq 2$的情况.

当$0\leq t\leq 2$时，令$g(t)=16t-t^3$，

则$g'(t)=16-3t^2>0$，

所以$g(t)=16t-t^3$在$[0,2]$上单调递增，

所以 $g(t)=16t-t^3$ 的最大值为 $g(2)=24$，

即 $S_{\triangle ABM}=\frac{1}{4}\left|t^3-16t\right|$ 的最大值为 $f(2)=\frac{1}{4}g(2)=6$.

综上可知，$\triangle AMB$ 的面积有最大值，最大值为6.

22.答案：(1)C的直角坐标方程为 $x^2+y^2-6x+5=0$；l的极坐标方程 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4\sqrt{3}=0$.

(2) $\frac{|MA|\cdot|MB|}{|AB|^2}=\frac{3}{13}$.

解析：(1)将 $x=\rho\cos\theta,\rho^2=x^2+y^2$ 代入 $\rho^2=6\rho\cos\theta-5$，

得曲线C的直角坐标方程为 $x^2+y^2-6x+5=0$.

将 $\begin{cases}x=4-\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t为参数)消去参数t，

得直线l的普通方程为 $\sqrt{3}x+y-4\sqrt{3}=0$.

将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入 $\sqrt{3}x+y-4\sqrt{3}=0$，

得直线l的极坐标方程 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4\sqrt{3}=0$.

(2)设点A，B对应的参数分别为 t_1,t_2.

因为 $M(4,0)$，所以 $|MA|=\left|t_1\right|,|MB|=\left|t_2\right|$.

将 $\begin{cases}x=4-\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t为参数)代入 $x^2+y^2-6x+5=0$，

得 $t^2-t-3=0$，

所以 $t_1+t_2=1,t_1\cdot t_2=-3$.

$|AB|=\left|t_1-t_2\right|=\sqrt{\left(t_1+t_2\right)^2-4t_1t_2}=\sqrt{13}$，

$|MA|\cdot|MB|=\left|t_1t_2\right|=3$，

所以 $\frac{|MA|\cdot|MB|}{|AB|^2}=\frac{3}{13}$.

23.答案：(1)解集为 $\left\{x\middle|-\frac{3}{2}\le x\le\frac{7}{2}\right\}$.

(2)取值范围为 $(-\infty,-\sqrt{10}]\cup[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cup[\sqrt{10},+\infty)$.

解析：(1)由题知 $f(x)-5\le0$，即 $f(x)\le5$.

当 $m=1$时，$f(x)=|x+1|+|x-3|$.

当 $x \le -1$ 时， $f(x) = -2x + 2 \le 5$，解得 $x \ge -\frac{3}{2}$，

$\therefore -\frac{3}{2} \le x \le -1$；

当 $-1 < x < 3$ 时， $f(x) = 4 \le 5$，恒成立，

$\therefore -1 < x < 3$；

当 $x \ge 3$ 时， $f(x) = 2x - 2 \le 5$，解得 $x \le \frac{7}{2}$，

$\therefore 3 \le x \le \frac{7}{2}$，

$\therefore f(x) - 5 \le 0$ 的解集为 $\left\{x \middle| -\frac{3}{2} \le x \le \frac{7}{2}\right\}$.

(2)由 $f(x) \le \left|a^2 - 6\right| + |x + m| - |x + 1|$，

即 $|x+1| + |x-3| \le \left|a^2 - 6\right|$.

令 $g(x) = |x+1| + |x-3|$，

$\therefore g(x) = |x+1| + |x-3| \ge |(x+1) - (x-3)| = 4$，

当且仅当 $(x+1)(x-3) \le 0$ 时等号成立，

$\therefore \left|a^2 - 6\right| \ge 4$，

$\therefore a^2 - 6 \ge 4$ 或 $a^2 - 6 \le -4$，

解得 $a \ge \sqrt{10}$ 或 $a \le -\sqrt{10}$ 或 $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$，

$\therefore$ 实数a的取值范围为 $(-\infty, -\sqrt{10}] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{10}, +\infty)$.