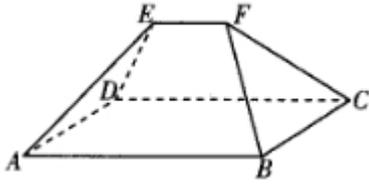


## 2022届高考数学精创预测卷 全国乙卷 文科

学校: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_ 考号: \_\_\_\_\_

### 一、选择题

1. 已知全集  $U = \{-2, 0, 1, 2\}$ , 集合  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{-2, 1\}$ , 则  $A \cap (\complement_U B) = ( )$   
 A.  $\{0\}$                       B.  $\{1\}$                       C.  $\{2\}$                       D.  $\{-2, 0\}$
2. 若复数  $(1-i)(a+i)$  在复平面内对应的点在第二象限, 则实数  $a$  的取值范围是( )  
 A.  $(-\infty, 1)$                   B.  $(-\infty, -1)$               C.  $(1, +\infty)$                   D.  $(-1, +\infty)$
3. 命题“ $\forall 1 \leq x \leq 2, x^2 - a \leq 0$ ”为真命题的一个充分不必要条件是( )  
 A.  $a \geq 4$                       B.  $a \geq 5$                       C.  $a \leq 4$                       D.  $a \leq 5$
4. 函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$  的最小值和最小正周期分别为( )  
 A.  $1, 2\pi$                       B.  $0, 2\pi$                       C.  $1, \pi$                       D.  $0, \pi$
5. 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ x - 3y - 3 \geq 0 \end{cases}$ , 则目标函数  $z = x + 2y$  的最大值为( )  
 A.  $\frac{11}{2}$                       B. 3                      C.  $\frac{5}{2}$                       D. 5
6. 已知  $\alpha, \beta$  为锐角, 且  $\tan \alpha = 2$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ , 则  $\tan(\alpha - \beta) = ( )$   
 A.  $-\frac{9}{13}$                       B.  $\frac{9}{13}$                       C.  $-\frac{7}{12}$                       D.  $\frac{7}{12}$
7. 已知任意正方形都有外接圆和内切圆, 若向正方形  $ABCD$  的外接圆中随机掷一粒黄豆, 则黄豆恰好落到正方形  $ABCD$  的内切圆内的概率是( )  
 A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{6}$
8. 函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$  在区间  $[1, 3]$  上的最小值为( )  
 A. -2                      B. 0                      C.  $-\frac{2}{3}$                       D.  $-\frac{4}{3}$
9. 已知偶函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递减, 且  $f(4) = 0$ , 则不等式  $(x+1)f(x) > 0$  的解集为( )  
 A.  $(-4, -1) \cup (4, +\infty)$                       B.  $(-\infty, -4) \cup (-1, 4)$   
 C.  $(-4, -1) \cup (-1, 4)$                       D.  $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$
10. 《九章算术》是我国古代的一部数学专著, 书中记载了一种名为“刍甍”的五面体(如图), 四边形  $ABCD$  为矩形,  $EF \parallel AB$ . 若  $AB = 3EF$ ,  $\triangle ADE$  和  $\triangle BCF$  都是正三角形, 且  $AD = 2EF$ , 则异面直线  $AE$  与  $CF$  所成角的大小为( )



- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

11. 已知点  $P(x, y) (x \neq 0, y \neq 0)$  是椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$  上的一个动点,  $F_1, F_2$  分别为椭圆的左, 右焦点,  $O$  是坐标原点, 若  $M$  是  $\angle F_1PF_2$  的平分线上的一点 (不与点  $P$  重合), 且  $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$ , 则  $|\overrightarrow{OM}|$  的取值范围为 ( )

- A.  $[0, 3)$                       B.  $(0, 2\sqrt{2})$                       C.  $[2\sqrt{2}, 3)$                       D.  $[0, 4]$

12. 若  $x = -2$  是函数  $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^{x-1}$  的极值点, 则  $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^{x-1}$  的极小值为 ( )

- A. -1                      B.  $-2e^{-3}$                       C.  $5e^{-3}$                       D. 1

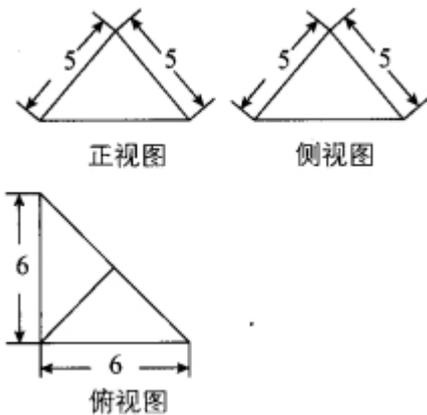
**二、填空题**

13. 已知向量  $a = (1, 2), b = (m, 3)$ , 若  $(a + 2b) \parallel b$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知双曲线  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$  上一点  $P$ , 其焦点为  $F_1, F_2$ ,  $PF_1 \perp PF_2$ , 则  $\square PF_1F_2$  的面积为 \_\_\_\_\_.

15. 在  $\square ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知三角形的面积是  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$ , 且  $a^2 = (b - c)^2 + 4$ , 则  $\square ABC$  的面积是 \_\_\_\_\_.

16. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该几何体所有棱长之和 (单位: cm) 为 \_\_\_\_\_.



**三、解答题**

17. 随科技创新方面的发展, 我国高新技术专利申请数也日益增加, 2015年到2019年我国高新技术专利申请数的数据如表所示 (把2015年到2019年分别用编号1到5来表示).

年份编号 $x$	1	2	3	4	5
专利申请数 $y$ (万件)	1.6	1.9	2.2	2.6	3.0

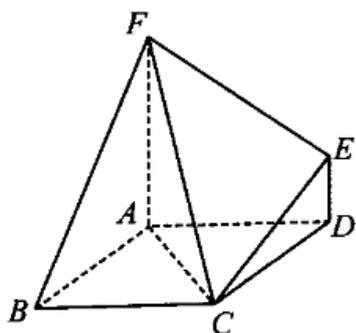
- (1)求高新技术专利申请数 $y$ 关于年份编号 $x$ 的回归方程;  
(2)由此线性回归方程预测2022年我国高新技术专利申请数.

$$\text{附: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 37.4.$$

18.已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 且 $2a_n - S_n = 1$ .

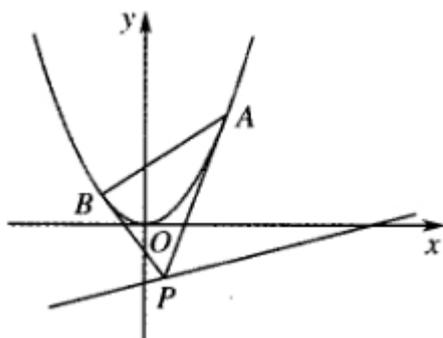
- (1)求 $a_n$ 与 $S_n$ ;  
(2)记 $b_n = \frac{2n-1}{a_n}$ , 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

19.如图, 已知多面体 $FABCDE$ 的底面 $ABCD$ 是边长为2的菱形,  $FA \perp$ 底面 $ABCD$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $DE \parallel AF$ , 且 $FA = 3DE = 3$ .



- (1)在线段 $AB$ 上是否存在点 $M$ , 使得 $ME \parallel$ 平面 $BCF$ ;  
(2)求三棱锥 $A-EFC$ 的体积.

20.已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F$ , 点 $P$ 是直线 $l: x - 2y - 1 = 0$ 上的动点,  $|FP|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$ .



- (1)求抛物线 $C$ 的方程;  
(2)过点 $P$ 作抛物线 $C$ 的两条切线, 切点分别为 $A, B$ , 若直线 $AB$ 过抛物线的焦点, 求直线 $AB$ 的方程.

21.已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1 (a \in \mathbf{R})$ .

(1)求函数  $f(x)$  的单调区间及极值;

(2)当  $a=1, x \geq 0$  时, 证明:  $(2 + \cos x) \cdot f'(x) \geq 3 \sin x$ .

22.选修4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $l$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = 4 - \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$$

( $t$  为参数). 以坐标原点为极点,  $x$  轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为

$$\rho^2 = 6\rho \cos \theta - 5.$$

(1)求  $C$  的直角坐标方程和  $l$  的极坐标方程;

(2)设点  $M(4, 0)$ , 直线  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点. 求  $\frac{|MA| \cdot |MB|}{|AB|^2}$ .

23.选修4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = |x + m| + |x - 3|$ .

(1)若  $m=1$ , 求  $f(x) - 5 \leq 0$  的解集;

(2)若  $f(x) \leq |a^2 - 6| + |x + m| - |x + 1|$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

## 参考答案

1.答案: A

解析: 由题意得  $\partial_j B = \{0, 2\}$ , 则  $A \cap (\partial_j B) = \{0\}$ , 故选A.

2.答案: B

解析:  $(1-i)(a+i) = a+i-ai-i^2 = a+1+(1-a)i$ , 其对应的点为  $(a+1, 1-a)$

, 因为复数对应的点在第二象限, 所以  $\begin{cases} 1+a < 0, \\ 1-a > 0, \end{cases}$  解得  $a < -1$ . 故选B.

3.答案: B

解析: 因为命题“ $\forall 1 \leq x \leq 2, x^2 - a \leq 0$ ”是真命题, 所以  $\forall 1 \leq x \leq 2, a \geq x^2$  恒成立, 所以  $a \geq 4$ , 结合选项, 命题是真命题的一个充分不必要条件是  $a \geq 5$ . 故选B.

4.答案: D

解析:  $\because f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1, \therefore$  当  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -1, f(x)$  取得最小值, 且  $f(x)_{\min} = 0$

. 又其最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$  的最小值和最小正周期分别为  $0, \pi$ . 故选D.

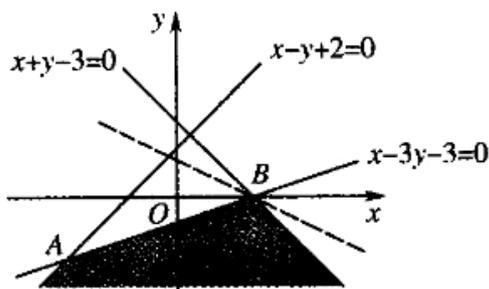
5.答案: B

解析: 作出可行域如图中阴影部分(含边界)所示,

根据图象可知当目标函数  $z = x + 2y$  过点B时取得最大值.

$$\text{联立} \begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases},$$

即点  $B(3, 0)$ , 所以  $z_{\max} = 3 + 2 \times 0 = 3$ , 故选B.



6.答案: A

解析: 因为  $\alpha, \beta$  为锐角, 所以  $\alpha + \beta \in (0, \pi)$ .

$$\text{由} \cos(\alpha + \beta) = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{得} \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{则} \tan(\alpha + \beta) = -\frac{1}{3}. \text{又} \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{3},$$

故  $\tan(\alpha - \beta) = \tan[2\alpha - (\alpha + \beta)] = \frac{\tan 2\alpha - \tan(\alpha + \beta)}{1 + \tan 2\alpha \tan(\alpha + \beta)} = -\frac{9}{13}$ , 故选A.

7.答案: B

解析: 设正方形  $ABCD$  的边长为2, 则其内切圆半径  $r = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ , 外接圆半径

$R = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$ , 由几何概型的概率计算公式知, 所求概率  $P = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2}$ . 故选B.

8.答案: D

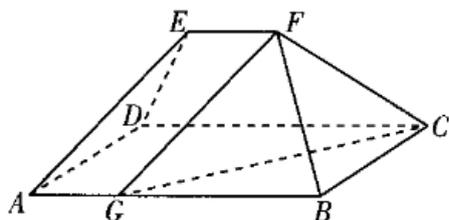
解析: 由题意, 得  $f'(x) = x^2 - 2x$ , 当  $x \in [1, 2)$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (2, 3]$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增, 所以函数  $f(x)$  在区间  $[1, 3]$  上的最小值为  $f(2) = -\frac{4}{3}$ .

9.答案: A

解析: 若  $x+1 < 0$ , 则  $(x+1)f(x) > 0$  等价于  $f(x) < 0$ ,  $\because f(-4) = f(4) = 0$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递减,  $\therefore f(x) < 0$  有  $-4 < x < 0$ , 由上  $-4 < x < -1$ , 若  $x+1 > 0$ , 则  $(x+1)f(x) > 0$  等价于  $f(x) > 0$ , 由偶函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 则  $f(x) > 0$ , 即得  $x > 4$ , 综上,  $(x+1)f(x) > 0$  的解集为  $(-4, -1) \cup (4, +\infty)$ . 故选: A.

10.答案: D

解析: 如图, 在平面  $ABFE$  中, 过  $F$  作  $FG \parallel AE$  交  $AB$  于  $G$ , 连接  $CG$ , 则  $\angle CFG$  为异面直线  $AE$  与  $CF$  所成的角或其补角. 设  $EF = 1$ , 则  $AB = 3$ ,  $BC = CF = AE = 2$ . 因为  $EF \parallel AB$ , 所以四边形  $AEFG$  为平行四边形, 所以  $FG = AE = 2$ ,  $AG = 1$ ,  $BG = 2$ , 所以  $GC = \sqrt{BG^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}$ , 所以  $CG^2 = GF^2 + CF^2$ , 所以  $\angle CFG = \frac{\pi}{2}$ , 故选D.



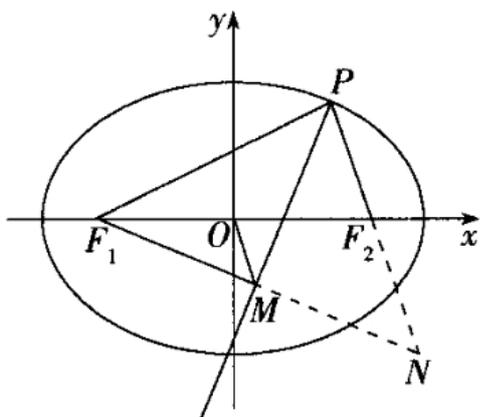
11.答案: B

解析: 如图, 延长  $PF_2$ ,  $F_1M$ , 交于点  $N$ , 则  $\triangle PF_1N$  为等腰三角形,  $M$  为  $F_1N$  的中点,

$|\overline{OM}| = \frac{1}{2} |\overline{F_2N}| = \frac{1}{2} \|\overline{PN}\| - \|\overline{PF_2}\| = \frac{1}{2} \cdot \|\overline{PF_1}\| - \|\overline{PF_2}\|$ . 由图可知, 当  $P$  在短轴端点时,  $|\overline{OM}|$

取得最小值, 此时  $|\overline{OM}| = 0$ , 当  $P$  在长轴端点时,  $|\overline{OM}|$  取得最大值, 此时  $|\overline{OM}| = 2\sqrt{2}$

, 但  $P$  不能在坐标轴上, 故取不到端点值, 所以  $|\overline{OM}|$  的取值范围为  $(0, 2\sqrt{2})$ .



12.答案: A

解析: 因为  $f'(x) = [x^2 + (a+2)x + a - 1]e^{x-1}$ ,  $f'(-2) = 0$ , 所以  $a = -1$ , 所以

$f(x) = (x^2 - x - 1)e^{x-1}$ ,  $f'(x) = (x^2 + x - 2)e^{x-1}$ . 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = -2$  或  $x = 1$ , 所以当  $x \in (-\infty, -2)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增; 当  $x \in (-2, 1)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增, 所以  $f(x)$  的极小值为  $f(1) = (1 - 1 - 1)e^{1-1} = -1$ .

13.答案:  $\frac{3}{2}$

解析: 因为  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (m, 3)$ , 所以  $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (1 + 2m, 8)$ , 因为  $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \parallel \mathbf{b}$ , 所以  $8m = 3 + 6m$ , 则

$$m = \frac{3}{2}.$$

14.答案: 16

解析: 设  $P$  为双曲线右支上的一点,  $PF_1 = m$ ,  $PF_2 = n$ . 由双曲线方程可得  $a = 6$ ,  $b = 4$ ,

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{13}$ , 则由双曲线的定义可得  $m - n = 2a = 12$ . 因为  $PF_1 \perp PF_2$ , 所以

$m^2 + n^2 = (2c)^2 = 208$ , 则  $(m - n)^2 = m^2 + n^2 - 2mn = 208 - 2mn = 144$ , 解得  $mn = 32$ , 所以

$$S_{\square PF_1 F_2} = \frac{1}{2}mn = 16.$$

15.答案:  $1 + \sqrt{2}$

解析: 因为  $S_{\triangle ABC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4} = \frac{1}{2}bc \sin A$ , 所以  $\frac{2bc \cos A}{4} = \frac{1}{2}bc \sin A$ , 所以  $\sin A = \cos A$ , 所以

$\tan A = 1$ . 因为  $0 < A < \pi$ , 所以  $A = \frac{\pi}{4}$ , 所以  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{4}$ . 因为  $a^2 = (b - c)^2 + 4$ , 所以

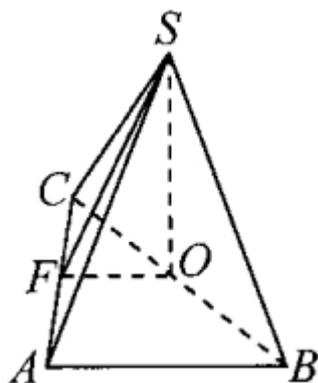
$$bc = 4 + 2\sqrt{2}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 1 + \sqrt{2}.$$

16.答案:  $3\sqrt{34} + 6\sqrt{2} + 12$

解析: 本题考查由三视图还原几何体. 由三视图知该几何体是一个底面为等腰直角三角形的三棱锥, 如图中三棱锥  $S - ABC$  所示, 取  $F$  为  $AC$  的中点,  $O$  为  $BC$  的中点, 连接  $SO$ ,  $OF$ ,  $SF$ , 则  $SO \perp$

平面 $ABC$ .由三视图可知 $AB = AC = 6, SF = 5$ ,则 $BC = 6\sqrt{2}, SA = SB = SC = \sqrt{5^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{34}$ ,

所以该几何体所有棱长之和为 $3\sqrt{34} + 6\sqrt{2} + 12$ .



17.答案: (1)回归方程为 $\hat{y} = 0.35x + 1.21$ .

(2)2022年我国高新技术专利数为4.01万件.

解析: (1)由已知可得 $\bar{x} = 3, \bar{y} = 2.26$ ,

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 15, \sum_{i=1}^5 y_i = 11.3, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 37.4,$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{37.4 - 33.9}{55 - 45} = 0.35,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 1.21,$$

所以回归方程为 $\hat{y} = 0.35x + 1.21$ .

(2)由(1)知 $\hat{y} = 0.35x + 1.21$ .

又2022年对应的是编号8,

所以2022年我国高新技术专利申请数 $y = 0.35 \times 8 + 1.21 = 4.01$ (万件),

即可以预测2022年我国高新技术专利数为4.01万件.

18.答案: (1) $a_n = 2a_{n-1}; S_n = 2^n - 1$ .

$$(2) T_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}.$$

解析: (1)由 $2a_n - S_n = 1$ ,得 $S_n = 2a_n - 1$ ,

当 $n=1$ 时,  $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$ ,得 $a_1 = 1$ ;

当 $n \geq 2$ 时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = (2a_n - 1) - (2a_{n-1} - 1)$ ,

得 $a_n = 2a_{n-1}$ ,

所以数列  $\{a_n\}$  是以1为首项，2为公比的等比数列，

所以  $a_n = 2^{n-1}$ .

所以  $S_n = 2a_n - 1 = 2^n - 1$ .

(2)由(1)可得  $b_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}}$ ,

则  $T_n = \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} = 1 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2^2} + \dots + (2n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ ,

$\frac{1}{2}T_n = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2^2} + 5 \times \frac{1}{2^3} + \dots + (2n-1) \cdot \frac{1}{2^n}$ ,

两式相减得  $\frac{1}{2}T_n = 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - (2n-1) \cdot \frac{1}{2^n}$ ,

所以  $T_n = 2 + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - (2n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

$= 2 + 4 \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - (2n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

$= 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}$ .

19.答案：(1)存在，理由见解析

(2)  $V_{\text{三棱锥}A-EFC} = \sqrt{3}$

解析：(1)存在，理由如下：

如图，分别取  $AB$ ， $AF$  靠近点  $A$  的三等分点  $M$ ， $G$ ，连接  $GE$ ， $GM$ ， $AE$ ， $ME$ ，

则  $\frac{AM}{AB} = \frac{AG}{AF} = \frac{1}{3}$ ，所以  $GM \parallel BF$ 。

又  $GM \not\subset$  平面  $BCF$ ， $BF \subset$  平面  $BCF$ ，

所以  $GM \parallel$  平面  $BCF$ 。

因为  $DE \parallel AF$ ， $AG = \frac{1}{3}AF$ ， $FA = 3DE = 3$ ，

所以  $DE \parallel AG$ ， $DE = AG$ ，

所以四边形  $ADEG$  是平行四边形，

所以  $GE \parallel AD$ ，

因为  $AD \parallel BC$ ，所以  $GE \parallel BC$ 。

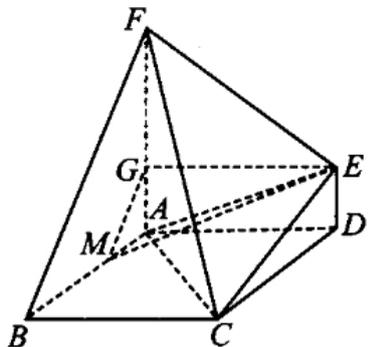
又  $GE \not\subset$  平面  $BCF$ ， $BC \subset$  平面  $BCF$ ，

所以  $GE \parallel$  平面  $BCF$ ，

且  $GM \cap GE = G$ ，所以平面  $GME \parallel$  平面  $BCF$ ，

$ME \subset$  平面  $GME$ ,

所以  $ME \parallel$  平面  $BCF$ .



(2) 由题意可知  $\triangle ACD$  为等边三角形, 因为  $FA \perp$  底面  $ABCD$ , 所以平面  $ACD \perp$  平面  $ADEF$ , 则点  $C$  到平面  $ADEF$  的距离  $d = \sqrt{3}$ ,

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot GE = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3,$$

$$V_{\text{三棱锥}A-EFC} = V_{\text{三棱锥}C-AEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle AEF} \cdot d = \sqrt{3}.$$

20. 答案: (1) 方程为  $x^2 = 8y$ .

(2) 方程为  $3x + 4y - 8 = 0$ .

解析: (1) 由题意得  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ,  $|FP|$  的最小值为  $\sqrt{5}$ .

$$\text{所以 } \frac{\left|0 - 2 \times \frac{p}{2} - 1\right|}{\sqrt{5}} = \frac{|p+1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5},$$

解得  $p = 4$ ,

所以抛物线  $C$  的方程为  $x^2 = 8y$ .

(2) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$ ,

由(1)知  $y = \frac{x^2}{8}$ , 所以  $y' = \frac{x}{4}$ ,

则切线  $PA$  的方程为  $y - y_1 = \frac{x_1}{4}(x - x_1)$ ,

即  $x_1 x = 4(y_1 + y)$ ;

同理  $PB$  的方程为  $x_2 x = 4(y_2 + y)$ .

将  $P(x_0, y_0)$  分别代入  $PA$  和  $PB$  方程可得  $\begin{cases} x_1 x_0 = 4(y_1 + y_0), \\ x_2 x_0 = 4(y_2 + y_0), \end{cases}$

对比可知直线  $AB$  的方程为  $x_0 x = 4(y_0 + y)$ ,

又直线 $AB$ 过抛物线的焦点 $F(0,2)$ ,

所以 $0=4(y_0+2)$ , 解得 $y_0=-2$ .

又点 $P$ 在直线 $l:x-2y-1=0$ 上,

所以 $x_0-2y_0-1=0$ ,

又 $y_0=-2$ , 所以 $x_0=-3$ ,

所以直线 $AB$ 的方程为 $3x+4y-8=0$ .

21.答案: (1)当 $f'(x)>0$ 时, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增;

当 $f'(x)<0$ 时,  $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减,

此时函数 $f(x)$ 只有极小值 $f(\ln a)=a-a\ln a-1$ , 没有极大值.

(2)证明过程见解析.

解析: (1) $f'(x)=e^x-a$ ,

当 $a\leq 0$ 时,  $f'(x)>0$ ,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

此时, 函数 $f(x)$ 既没有极大值也没有极小值;

当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)=0$ , 则 $x=\ln a$ ,

当 $f'(x)>0$ 时,  $x>\ln a$ ,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增;

当 $f'(x)<0$ 时,  $x<\ln a$ ,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减,

此时函数 $f(x)$ 只有极小值 $f(\ln a)=a-a\ln a-1$ , 没有极大值.

(2)证明: 当 $a=1$ 时,  $f(x)=e^x-x-1$ ,

$\therefore f'(x)=e^x-1$ .

令 $g(x)=(2+\cos x)(e^x-1)-3\sin x$ ,

则 $g'(x)=e^x(2+\cos x-\sin x)+\sin x-3\cos x$ ,

当 $x\geq 0$ 时,  $e^x\geq 1$ ,

$\therefore g'(x)\geq 2+\cos x-\sin x+\sin x-3\cos x=2-2\cos x\geq 0$ ,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)\geq g(0)=0$ ,

$\therefore (2+\cos x)(e^x-1)-3\sin x\geq 0$ ,

$\therefore (2+\cos x)f'(x)\geq 3\sin x$ .

22. 答案: (1)  $C$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ ;  $l$  的极坐标方程  $\sqrt{3}\rho \cos \theta + \rho \sin \theta - 4\sqrt{3} = 0$ .

$$(2) \frac{|MA| \cdot |MB|}{|AB|^2} = \frac{3}{13}.$$

解析: (1) 将  $x = \rho \cos \theta, \rho^2 = x^2 + y^2$  代入  $\rho^2 = 6\rho \cos \theta - 5$ ,

得曲线  $C$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ .

$$\text{将} \begin{cases} x = 4 - \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \text{ 消去参数 } t,$$

得直线  $l$  的普通方程为  $\sqrt{3}x + y - 4\sqrt{3} = 0$ .

将  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  代入  $\sqrt{3}x + y - 4\sqrt{3} = 0$ ,

得直线  $l$  的极坐标方程  $\sqrt{3}\rho \cos \theta + \rho \sin \theta - 4\sqrt{3} = 0$ .

(2) 设点  $A, B$  对应的参数分别为  $t_1, t_2$ .

因为  $M(4, 0)$ , 所以  $|MA| = |t_1|, |MB| = |t_2|$ .

$$\text{将} \begin{cases} x = 4 - \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \text{ 代入 } x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0,$$

得  $t^2 - t - 3 = 0$ ,

所以  $t_1 + t_2 = 1, t_1 \cdot t_2 = -3$ .

$$|AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{13},$$

$$|MA| \cdot |MB| = |t_1 t_2| = 3,$$

$$\text{所以} \frac{|MA| \cdot |MB|}{|AB|^2} = \frac{3}{13}.$$

23. 答案: (1) 解集为  $\left\{x \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$ .

(2) 取值范围为  $(-\infty, -\sqrt{10}] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{10}, +\infty)$ .

解析: (1) 由题知  $f(x) - 5 \leq 0$ , 即  $f(x) \leq 5$ .

当  $m = 1$  时,  $f(x) = |x + 1| + |x - 3|$ .

当  $x \leq -1$  时,  $f(x) = -2x + 2 \leq 5$ , 解得  $x \geq -\frac{3}{2}$ ,

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq -1;$$

当  $-1 < x < 3$  时,  $f(x) = 4 \leq 5$ , 恒成立,

$$\therefore -1 < x < 3;$$

$$\text{当 } x \geq 3 \text{ 时, } f(x) = 2x - 2 \leq 5, \text{ 解得 } x \leq \frac{7}{2},$$

$$\therefore 3 \leq x \leq \frac{7}{2},$$

$$\therefore f(x) - 5 \leq 0 \text{ 的解集为 } \left\{ x \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2} \right\}.$$

$$(2) \text{ 由 } f(x) \leq |a^2 - 6| + |x + m| - |x + 1|,$$

$$\text{即 } |x + 1| + |x - 3| \leq |a^2 - 6|.$$

$$\text{令 } g(x) = |x + 1| + |x - 3|,$$

$$\therefore g(x) = |x + 1| + |x - 3| \geq |(x + 1) - (x - 3)| = 4,$$

当且仅当  $(x + 1)(x - 3) \leq 0$  时等号成立,

$$\therefore |a^2 - 6| \geq 4,$$

$$\therefore a^2 - 6 \geq 4 \text{ 或 } a^2 - 6 \leq -4,$$

$$\text{解得 } a \geq \sqrt{10} \text{ 或 } a \leq -\sqrt{10} \text{ 或 } -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围为 } (-\infty, -\sqrt{10}] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{10}, +\infty).$$