

卓越高中千校联盟2022 高考终极押题卷

文科数学试题参考答案与评分标准

1. D 集合 $A = \{x|1 < x \leq 3\}$, $B = \{x|2 < x \leq 4\}$, 则 $A \cup B = \{x|1 < x \leq 4\}$, 故选 D
2. B 由 $\frac{z+i}{1-2i} = 1+i$, 得 $z+i = (1+i)(1-2i) = 1-2i+i+2 = 3-i$, $\therefore z = 3-2i$, z 的共轭复数为 $\bar{z} = 3+2i$, 故选 B
3. D $\because 2\vec{a}-\vec{b} = (2-k, 6)$ 由 $\vec{a} \cdot (2\vec{a}-\vec{b}) = 0$, 得 $(1, 2) \cdot (2-k, 6) = 0$, $\therefore 2-k+12=0$, 解得 $k=14$. 故选 D
4. D 若“ $\exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $\sin x - \sqrt{3} \cos x = a$ ”为假命题, 则 $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2\sin(x - \frac{\pi}{3}) = a$ 无解, $\because 2\sin(x - \frac{\pi}{3}) \in [-2, 2]$, $\therefore a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, 故选: D
5. D 当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - 2 = 0$, 得 $x = \ln 2$, 当 $x < 0$, 则 $-x > 0$, $f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + 2 = 0$, 得 $x = -\ln 2$, 又 $\because$ 设 $f(x)$ 为奇函数, $f(0) = 0$, 故选: D
6. B 解: 因为 $\tan 75^\circ - \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} - \frac{\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ}{\cos 75^\circ \sin 75^\circ} = \frac{-\cos 150^\circ}{\frac{1}{2} \sin 150^\circ} = 2\sqrt{3}$; 故选: B
7. D 解: $2x+y = (2x+y) \times (\frac{1}{x} + \frac{2}{y}) = 4 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 8$ 当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{4x}{y}$, 即 $x=2, y=4$ 时取等号, 解可得 $2x+y \geq 8$, 即 $2x+y$ 的最小值 8. 故选: D
8. B 解: 由题即将函数 $y = \sin 3x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin 3(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(3x + \frac{3\pi}{4})$, 即所得的函数解析式是 $y = \sin(3x + \frac{3\pi}{4})$, 故选: B
9. B 解: 由题意正三棱柱的高为 2, 底面的边长为 2, 该三棱柱的体积为 $V = Sh = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 2\sqrt{3}$, 故选 B
10. B 抛物线 $y = \frac{x^2}{16}$ 的焦点为 $F(0, 4)$, 圆 $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$ 的圆心为 $C(4, 1)$, 半径 $r=2$, F 到圆 C 上点的距离的最小值为 $|FC| - r = 5 - 2 = 3$. 故选: B
11. C 解: 设公差为 d , $a_5 - a_2 = 3d = -3 - (-9) = 6$, $\therefore d = 2$, $\therefore a_n = 2n - 13$, $1 \leq n \leq 6$ 时, $a_n < 0$, $n \geq 7$ 时, $a_n > 0$, $\therefore T_5 < T_3 < T_1 < 0$, $T_6 > T_4 > T_2 > 0$, 故 T_5 是最小值; 当 $n \geq 7$, $T_n > 0$, 并且当 n 越来越大时, T_n 越来越大, 所以 T_n 无最大项. 故选 C
12. D 解: $\because f'(x) = 2ax - 3x^2$, ($x > 0$), 由题意, 只需 $f'(x) = 2ax - 3x^2 = 1$ ($x > 0$) 有解, 则只需 $2a = \frac{3x^2 + 1}{x} = 3x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{3} \therefore a \geq \sqrt{3}$. 故选: D
13. $\frac{40}{31}$ 解: 由题意可知, 每天织布的数量是以 2 为公比的等比数列, 设首项 a_1 , 则 $\frac{a_1(1-2^5)}{1-2} = 5$, 解可得, $a_1 = \frac{5}{31}$, $a_4 = \frac{5}{31} \times 2^3 = \frac{40}{31}$
14. $\frac{1}{6}$ 解: 一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次, 可得基本事件的总数为 $6 \times 6 = 36$ 种, 而

点数和为 7 的事件为 (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (1,1), 共 6 种, 则点数和为 7 的概率为 $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. 故答案为: $\frac{1}{6}$

15. ②④ 解: ①如果 $m \perp n, m \perp \alpha, n // \beta$, 不能得出 $\alpha \perp \beta$, 故错误;

②如果 $n // \alpha$, 则存在直线 $l \subset \alpha$, 使 $n // l$, 由 $m \perp \alpha$, 可得 $m \perp l$, 那么 $m \perp n$. 故正确;

③如果 $m // n, m \subset \alpha$, 那么 $n // \alpha$. 或 $n \subset \alpha$, 故错误

④如果 $m // n, \alpha // \beta$, 那么 m, n 与 α 所成的角和 m, n 与 β 所成的角均相等, 故正确;

16. $6n-1$ 解: $\because a_n = 2^{n-1} + (-1)^n (2n-1)$, $\therefore$ 当 $n=2k-1, k \in \mathbb{N}^*$ 时, 有 $a_{n-1} = 2^{2k-2} - (4k-3)$;

当 $n=2k, k \in \mathbb{N}^*$ 时, 有 $a_n = 2^{2k-1} + (4k-1)$, $\therefore a_{n-1} + a_n = 3 \times 4^{k-1} + 2$,

$$\therefore S_{2n} = 3 \times (4^0 + 4^1 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1}) + 2n = 3 \times \frac{1-4^n}{1-4} + 2n = 4^n + 2n - 1$$

$$\therefore 2a_{2n} = 2 \times [2^{2n-1} + (-1)^{2n} (4n-1)] = 2^{2n} + 8n - 2 = 4^n + 8n - 2,$$

$$\therefore 2a_{2n} - S_{2n} = 6n - 1. \text{ 故答案为: } 6n - 1$$

17. 解: (1) 因为 $\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C - \sqrt{2} \sin A \sin C$,

由正弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - \sqrt{2} ac$,2 分

$$\text{可得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2} ac}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{4 分}$$

因为 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$6 分

(2) 选择①时, $A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{4}$,

$$\text{故 } \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \text{8 分}$$

根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $a=3$,10 分

$$\text{可得 } S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{9+3\sqrt{3}}{4}. \text{12 分}$$

选择②时, $a = 3\sqrt{2} \sin B$, $\therefore a=3$, 根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $\frac{3}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

解得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{1}{2}$ 8 分

$$\text{所以: } \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \text{10 分}$$

$$\text{可得 } S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{9+3\sqrt{3}}{4}. \text{12 分}$$

18. 解: (1) 2 月到 6 月中, 合格的月份为 2, 3, 4 月份, 则 5 个月份任意选取 3 个月份的基本事件有 (2,3,4), (2,3,5), (2,3,6), (2,4,5), (2,4,6), (2,5,6), (3,4,5), (3,4,6), (3,5,6), (4,5,6), 共计 10 个,2 分

其中恰好有两个月考核合格的基本事件有 (2,3,5), (2,3,6), (2,4,5), (2,4,6), (3,4,5), (3,4,6), 共计 6 个.3 分

故恰好有两个月考核合格的概率为 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$4 分

(2) $\bar{x}=7, \bar{y}=6, \hat{b}=\frac{379.5-8 \times 7 \times 6}{460-8 \times 7^2}=\frac{43.5}{68} \approx 0.64, \hat{a}=6-0.640 \times 7=1.52,$ 6分

故 $\hat{y}=0.64x+1.52$8分

(3) 当 $x=15$ 千只, $\hat{y}=0.64 \times 15+1.52=11.12$ (十万元)10分

故 9 月份的利润约为 11.12 十万元.12分

19. 解: (1) $\because AE \perp$ 平面 $ABCD, AE // CF, \therefore CF \perp$ 平面 $ABCD,$ 1分

又 $\because BD \subset$ 平面 $ABCD, \therefore BD \perp CF$. 又 $AB=AD=1, AB \perp AD, \therefore BD=\sqrt{2},$ 2分

过 D 作 BC 的垂线, 可得 $CD=\sqrt{2}$, 又 $BC=2, \therefore BD^2+DC^2=BC^2, \therefore BD \perp CD,$ 4分

$\therefore BD \perp$ 平面 $DCF,$ 5分

$\therefore BD \perp DF$ 6分

(2) $\because AE \perp$ 平面 $ABCD, \therefore$ 点 E 到平面 $ABCD$ 的距离是 2, $Rt\triangle BCD$ 中, $S_{\triangle BCD}=1.$

$\therefore V_{E-BCD}=\frac{1}{3} S_{\triangle BCD} h=\frac{2}{3}.$ 8分

又 $\triangle CDE$ 中, 易知 $CD=\sqrt{2}, DE=\sqrt{5}, CE=3 \therefore S_{\triangle CDE}=\frac{3}{2},$ 10分

设 B 到平面 CDE 的距离为 h , 又 $V_{B-ECD}=V_{E-BCD}, \therefore h=\frac{4}{3}$ 11分

$\therefore$ 直线 BE 与平面 CDE 所成角的正弦值为 $\frac{h}{BE}=\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{5}}=\frac{4}{3\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$ 12分

20. 解: (I) 设 $P(x, y)$, 由已知有 $\frac{y}{x+\sqrt{5}} \times \frac{y}{x-\sqrt{5}}=-\frac{4}{5},$ 2分

整理得动点 P 的轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1(x \neq \pm \sqrt{5})$ 4分

(II) 由(I)知, E 的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1(x \neq \pm \sqrt{5})$, 所以 $B(0, 2)$ 5分

设存在直线 l 适合题意, 并设 l 的方程为 $y=\sqrt{3}x+m,$

由 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x+m \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$, 得 $19x^2+10\sqrt{3}mx+5(m^2-4)=0,$ 7分

由 $\Delta=(10\sqrt{3}m)^2-4 \times 19 \times 5(m^2-4)>0$, 得 $-\sqrt{19}<m<\sqrt{19},$ 8分

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), x_1+x_2=-\frac{10\sqrt{3}m}{19}.$ 9分

因为点 G 为 $\triangle BMN$ 的重心, 所以 $x_1+x_2+x_B=3x_G, -\frac{10\sqrt{3}m}{19}=\sqrt{3}$ 10分

解得 $m=-\frac{19}{10}, \therefore m=-\frac{19}{10} \in (-\sqrt{19}, \sqrt{19}),$ 而 $m=-\frac{19}{10}$ 时, $y_1+y_2+y_B \neq 3y_G.$ 11分

所以不存在直线 l , 使得 G 是 $\triangle BMN$ 的重心.12分

21. 解: (I) 当 $a=2$ 时, $f(x)=2x^3-3x^2+1$. 所以 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$ 1分

令 $f'(x)=6x(x-1)=0$, 得 $x=0$ 或 $x=1$ 2分

当 x 在 $[-\frac{1}{2}, 2]$ 上变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	极大值 1	$\searrow$	极小值 0	$\nearrow$	5

……4分

所以,当 $x \in [-\frac{1}{2}, 2]$ 时,函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)=5$,

函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(-\frac{1}{2})=f(1)=0$

……5分

(II)解析 1:易知 $a \neq 0, f'(x)=3ax^2-6x$,

……6分

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=-\frac{2}{a}$,

……7分

当 $a>0$ 时, $x \in (-\infty, 0), f'(x)>0; x \in (0, -\frac{2}{a}), f'(x)<0; x \in (-\frac{2}{a}, +\infty), f'(x)>0$;

且 $f(0)=1>0, f(-1)=-a-2<0, f(x)$ 有小于零的零点,不符合题意

……9分

当 $a<0$ 时, $x \in (-\infty, -\frac{2}{a}), f'(x)<0; x \in (-\frac{2}{a}, 0), f'(x)>0; x \in (0, +\infty), f'(x)>0$;

要使 $f(x)$ 有唯一的零点 x_0 且 $x_0>0$,只需 $f(-\frac{2}{a})=1-\frac{4}{a^2}>0$,

……11分

即 $a^2>4, a<-2$

……12分

解析 2:易知 $a \neq 0, f(x)=ax^3-3x^2+1$ 有唯一的零点且为正,

等价于 $a=3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ 有唯一的零根且为正,

……6分

令 $t=\frac{1}{x}$,则问题又等价于 $a=-t^3+3t$ 有唯一的零根且为正,

即 $y=a$ 与 $y=-t^3+3t$ 有唯一的交点且交点在 y 轴右侧

……7分

记 $f(t)=-t^3+3t, f'(t)=-3t^2+3$,由 $f'(t)=0, t=\pm 1$,

……8分

$t \in (-\infty, -1), f'(t)<0; t \in (-1, 1), f'(t)>0; t \in (1, +\infty), f'(t)<0$,

……10分

要使 $a=-t^3+3t$ 有唯一的正零根,只需 $a<f(-1)=-2$

……11分

$\therefore a < -2$

……12分

22.(1)因为 $\begin{cases} x=2\cos\theta+1 \\ y=2\sin\theta-\sqrt{3} \end{cases}$ (θ 为参数),

所以 C 的普通方程为 $(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=4$.

……2分

l 的直角坐标方程为 $2x-\sqrt{3}y+11=0$

……4分

(2)由(1)可知 C 的圆心是 $(1, -\sqrt{3})$,半径 $r=2$

……6分

圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|2 \times 1 - \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 11|}{\sqrt{7}} = \frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$

……8分

故 C 上的点到 l 的距离的最大值为 $\frac{16\sqrt{7}}{7}+2$

……10分

23.解:(1) $f(x)=\begin{cases} 9-3x, & x \leq \frac{5}{2}, \\ x-1, & \frac{5}{2} < x \leq 4 \\ 3x-9, & x > 4 \end{cases}$ 3分

因此,不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集为 $\{x|x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$5分

(2)由(1)可知, $f(x)_{\min} = \frac{3}{2}$ 8分

则 $\frac{1}{2}a^2 - a \leq \frac{3}{2}$,解得: $-1 \leq a \leq 3$ 10分