数学

命题双向细目表

题号	题型	分值	知识组块	学科能力	预测难度
1	单选题	5	集合	本题考查集合的基本运算	0.9
2	单选题	5	复数	本题考查复数运算、模的概念	0.9
3	单选题	5	函数图象	本题以市场经济“蛛网模型”为背景,考查函数图象及读图能力	0.8
4	单选题	5	对数运算	本题考查函数与方程等知识,考查对数运算	0.8
5	单选题	5	圆锥曲线	本题主要考查双曲线的定义、离心率、余弦定理等知识,考查运算求解能力及推理论证能力	0.7
6	单选题	5	立体几何	本题考查棱锥、球等几何体,考查空间想象能力及运算求解能力	0.6
7	单选题	5	函数与不等式	本题考查函数与导数、不等式等知识,考查数学抽象思维与推理论证能力	0.5
8	单选题	5	排列与组合	本题以冬季奥林匹克运动会纪念币图案为背景,考查排列、组合的知识,考查分类讨论思想	0.4
9	多选题	5	统计与概率	本题以现实生活“抗疫”为背景,考查新定义“分层抽样”及统计知识	0.8
10	多选题	5	三角函数	本题考查三角函数零点、平移变换、对称性、单调性等知识,考查运算求解能力及推理论证能力	0.8
11	多选题	5	直线与圆	本题考查直线与圆、面积、斜率、三角函数等知识,考查推理论证能力及转化与化归思想	0.6
12	多选题	5	立体几何	本题考查线线、线面、面面平行与垂直等知识,考查运算求解能力与推理论证能力	0.5
13	填空题	5	平面向量	本题考查向量、向量的模、三角函数的性质,考查运算求解能力及转化与化归思想	0.7
14	填空题(开放题)	5	函数	本题以开放题的形式,考查函数的概念、函数的奇偶性、导数等知识	0.7

题号	题型	分值	知识组块	学科能力	预测难度
15	填空题	5	圆锥曲线	本题主要考查抛物线的方程与性质,考查运算求解能力和推理论证能力	0.6
16	填空题(双空题)	5	数学文化与数列	本题以“掷骰子游戏”数学文化为背景,主要考查数列、事件概率及数学建模能力	0.4
17	解答题	10	数列	本题考查数列通项公式、前 n 项和等知识,考查运算求解能力	0.7
18	解答题	12	统计与概率	本题考查事件概率、随机变量的分布列及数学期望	0.6
19	解答题	12	解三角形	本题考查正弦定理、余弦定理、解三角形等知识,考查运算求解能力及转化与化归思想	0.5
20	解答题	12	空间几何体	本题考查线面平行、空间向量的应用、棱锥的体积、二面角等知识,考查运算求解能力及转化与化归思想	0.5
21	解答题	12	圆锥曲线	本题考查椭圆方程、向量等综合知识,考查推理论证能力、运算求解能力及转化与化归思想	0.5
22	解答题	12	导数及其应用	本题考查导数的应用、不等式、极值等综合知识,考查推理论证能力、运算求解能力及转化与化归思想	0.4

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。

1. C 【命题意图】本题主要考查集合的基本运算.

【解题思路】由题意得 $A=\{x|x>\sqrt{7}$ 或 $x<-\sqrt{7}\}$,$B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 4\}$,所以 $A\cap B=(\sqrt{7},4]$.

故选 C.

2. D 【命题意图】本题主要考查复数运算、模的概念.

【解题思路】由 $z_1=z_2$,得 $a=3,b=1$,所以 $|a+bi|=|3+i|=\sqrt{10}$.

故选 D.

3. C 【命题意图】本题以市场经济“蛛网模型”为背景,考查函数图象及读图能力.

【解题思路】由题图可知,当 $D(t)=S(t)$ 时,草莓市场供求平衡,供给量 Q_0 和市场价格 P_0 稳定.第一期的草莓市场价格 P_1 由供给量 Q_1 来决定.由于 $Q_1<Q_0$,导致草莓市场价格上涨到 $P_1(P_1>P_0)$,故种植商扩大草莓生产,达到较大的产量 $Q_2(Q_2>Q_0)$,而供给量 Q_2 导致第二期的草莓市场价格下跌到 $P_2(P_2<P_0)$,这又导致种植商决定第三期的产量缩减到 $Q_3(Q_3<Q_0)$,同样又导致市场价格上涨到 $P_3(P_3>P_0)$……这样价格 P 就像蛛网一样运动.随着生产周期不断波动,草莓市场价格由 P_1 下降到 P_2,再上升到 P_3……直至调节到稳定的价格 P_0.因为每一期的市场价格保持恒定,所以选项 C 的图象满足题意.

故选 C.

4. C 【命题意图】本题考查函数与方程等知识,考查对数运算.

【解题思路】设目前大气中二氧化碳的含量为 a.由题意,知当二氧化碳的含量为 $1.25a$ 时,地球平均温度上升 0.5 ℃,当二氧化碳的含量为 $a\times1.25^2$ 时,地球平均温度上升 (0.5×2) ℃……当大气中二氧化碳的含量为 $a\times1.25^n$ 时,地球平均温度上升 $(0.5\times n)$ ℃.令 $a\times1.25^n=4a$,即 $1.25^n=4$,方程两边同时取常用对数,则 $n=\frac{\lg 4}{\lg 1.25}=\frac{2\lg 2}{\lg\frac{5}{4}}=\frac{2\lg 2}{1-3\lg 2}\approx6$,所以到 2050 年,地球平均温度将上升约 $0.5\times6=3$(℃).

故选 C.

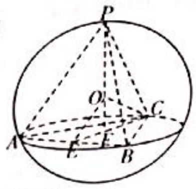
5. A 【命题意图】本题考查双曲线的定义、离心率、余弦定理等知识,考查运算求解能力及推理论证能力.

【解题思路】由 $5|AF_1|=3|AB|$,设 $|AF_1|=3m(m>0)$,则 $|AB|=5m$.由 $4|AF_2|=|F_2B|$,可得 $|AF_2|=m$,$|F_2B|=4m$.由双曲线定义得 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,即 $3m-m=2a$,则 $m=a$.由双曲线定义得 $|BF_1|-|BF_2|=2a$,所以 $|BF_1|=|BF_2|+2a=4m+2a=6m$.在 $\triangle AF_1F_2$ 中,$\cos\angle F_1AF_2=\frac{|AF_1|^2+|AF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|AF_1|\cdot|AF_2|}=\frac{(3m)^2+m^2-(2c)^2}{2\times3m\times m}=\frac{5m^2-2c^2}{3m^2}=\frac{5a^2-2c^2}{3a^2}$,在 $\triangle AF_1B$ 中,$\cos\angle F_1AB=\frac{|AF_1|^2+|AB|^2-|F_1B|^2}{2|AF_1|\cdot|AB|}=\frac{(3m)^2+(5m)^2-(6m)^2}{2\times3m\times5m}=-\frac{1}{15}$,所以 $\frac{5a^2-2c^2}{3a^2}=-\frac{1}{15}$,所以 $13a^2=5c^2$,故双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{13}{5}}=\frac{\sqrt{65}}{5}$.

故选 A.

6. C 【命题意图】本题考查棱锥、球等几何体，考查空间想象能力及运算求解能力.

【解题思路】如图，在正四面体 $P\text{-}ABC$ 中，顶点 P 在底面的射影为 F，球心 O 在 PF 上. 设正四面体的棱长为 a，则 $PC=a, FC=\frac{\sqrt{3}}{3}a, EF=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，正四面体的高 $PF=\sqrt{PC^2-FC^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$. 设外接球半径为 R，在 $\mathrm{Rt}\triangle OFC$ 中，$OC^2=OF^2+FC^2$，即 $R^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-R\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$，解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$. 所以在 $\mathrm{Rt}\triangle OEF$ 中，$OE=\sqrt{OF^2+EF^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$. 过点 E 作外接球 O 的截面，设截面圆的半径为 r，只有当 $OE\perp$ 截面圆所在的平面时，截面圆的周长最小，此时截面圆的半径 $r=\sqrt{R^2-OE^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2}=\frac{1}{2}a$，所以其周长与球 O 的大圆的周长的比值为 $\frac{2\pi r}{2\pi R}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{4}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



故选 C.

7. C 【命题意图】本题考查函数与导数、不等式等知识，考查数学抽象思维与推理论证能力.

【解题思路】令函数 $g(x)=e^x f(x)$. 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=e^{2x}f(x)$，所以 $e^{-x}f(-x)=e^x f(x)$，即 $g(-x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 为偶函数.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导数，所以 $g'(x)=e^x[f'(x)+f(x)]$. 由题设，知当 $x<0$ 时，$f'(x)+f(x)<0$，故 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 由 $g(-2)=g(2)$，得 $e^{-2}\cdot f(-2)=e^2f(2)$. 又 $g(1)<g(2)$，得 $ef(1)<e^2f(2)$，故 $ef(1)<e^{-2}f(-2)$，所以 $f(-2)>e^3f(1)$.

故选 C.

8. D 【命题意图】本题以冬季奥林匹克运动会纪念币图案为背景，考查排列、组合的知识及分类讨论思想.

【解题思路】可分为两类：第 1 类，区域 A_1,A_4 同色，涂 A_1,A_4 有 4 种方法，涂 A_5 有 3 种方法，涂 A_2,A_3 有 $A_3^2=6$(种)方法，故由分步乘法计数原理知，共有 $4\times3\times6=72$(种)方法；第 2 类，区域 A_1,A_4 不同色，涂 A_1,A_4 有 $A_4^2=12$(种)方法，涂 A_5 有 2 种方法，涂 A_2,A_3 有 7 种方法(A_2,A_4 同色，有 3 种方法；A_2,A_4 不同色，有 4 种方法)，故由分步乘法计数原理知，共有 $12\times2\times7=168$(种)方法. 根据分类加法计数原理，着色方案共有 $72+168=240$(种)，所以在所有的着色方案中任抽一种，抽到区域 A_1,A_4 同色的概率为 $\frac{72}{240}=\frac{3}{10}$.

故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9. AD 【命题意图】本题以现实生活"抗疫"为背景，考查新定义"分层抽样"及统计知识.

【解题思路】A 中，$M_1=40\times\frac{80\times2.5}{80\times2.5+160\times2+200\times1.4}=10$，A 正确；B 中，$M_2=40\times\frac{160\times2}{80\times2.5+160\times2+200\times1.4}=16$，$M_3=40\times\frac{200\times1.4}{80\times2.5+160\times2+200\times1.4}=14$，显然 $M_2>M_3$，而 H_2 小区参加抗疫的人数为 160，H_3 小区参加抗疫的人数为 200，$160<200$，B 错误；C 中，由 $10:16:14\neq80:160:200$，可知各小区被表彰的人数与该小区参加抗疫的人数不成比例，C 错误；D 中，由"奈曼公式"可知，小区被表彰的人数与该小区参加抗疫的人数与"网评"分数的标准差的积成正比，D 正确.

故选 AD.

10. ABC 【命题意图】本题考查三角函数零点、平移变换、对称性、单调性等知识，考查运算求解能力和推理论证能力.

【解题思路】$f(x)=2\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$，由 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$ 得 $\omega=4$，所以 $f(x)=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$，其图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后的对应函数为 $g(x)=2\cos\left[4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$. 由 $g\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(4\times\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\pi=-2$，知 $x=\frac{\pi}{12}$ 是 $g(x)$ 的一条对称轴，A 正确；令 $g(x)=0$，得 $4x+\frac{2\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个零点 $\frac{5\pi}{24}$ 和 $\frac{11\pi}{24}$，B 正确；令 $2k\pi\leqslant4x+\frac{2\pi}{3}\leqslant2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$，即 $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}$，得 $g(x)$ 在 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递减，C 正确；由 $g(x)>1$，得 $\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}$，故在

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内，只需验证当 $x=1$ 时，不等式是否成立即可，当 $x=1$ 时，可估算不等式 $\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}$成立，故D错误.

故选ABC.

11. CD 【命题意图】本题考查直线与圆、面积、斜率、三角函数等知识，考查推理论证能力及转化与化归思想.

【解题思路】易知点 $A(-2,0)$，点 B 在直线 l 上. 对于A，线段 AB 的长度 $|AB|=\sqrt{(-1+2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|0\times 2-0\times 1+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故圆 C 上一点到直线 l 的最大距离 $h=d+1=\frac{4\sqrt{5}}{5}+1$，所以 $\triangle PAB$ 面积的最大值 $(S_{\triangle PAB})_{\max}=\frac{1}{2}|AB|\times h=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}+1\right)=2+\frac{\sqrt{5}}{2}>3$，A错误. 对于B，由题意知，$|PA|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$，$|PB|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$，因为 P 在圆 C 上，且 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，所以联立方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ \sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2},\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{15}}{8},\\ y=\frac{7}{8}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{15}}{8},\\ y=\frac{7}{8},\end{cases}$ 故圆 C 上有两点 $P_1\left(\frac{\sqrt{15}}{8},\frac{7}{8}\right)$，$P_2\left(-\frac{\sqrt{15}}{8},\frac{7}{8}\right)$，使得 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，B错误. 对于C，当 $\angle PAB$ 最小时，直线 PA 与圆 C 相切，且切点 P 位于 x 轴上方，如图1所示，此时 $\angle PAO=30°$，则 $\tan\angle PAB=\tan(\angle BAO-30°)=\frac{\tan\angle BAO-\tan 30°}{1+\tan\angle BAO\cdot\tan 30°}=\frac{2-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+2\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=5\sqrt{3}-8>\frac{1}{2}$，C正确. 对于D，当 $\angle PAB$ 最大时，直线 PA 与圆 C 相切，且切点 P 位于 x 轴下方，如图2所示，此时 $\angle PAO=30°$，且直线 PA 的斜率最小，最小值为 $\tan(180°-\angle PAO)=\tan 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，而 $\frac{y}{x+2}$ 的几何意义是直线 PA 的斜率，所以此时 $\frac{y}{x+2}$ 取得最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，D正确.

故选CD.

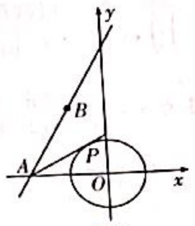


图1

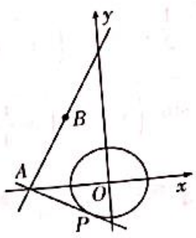
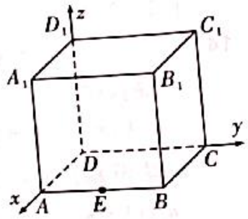


图2

12. AD 【命题意图】本题考查线线、线面、面面平行与垂直等知识，考查运算求解能力与推理论证能力.



【解题思路】如图，建立空间直角坐标系，设正方体的棱长为1，则 $A_1(1,0,1)$，$B_1(1,1,1)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$. 对于A，当点 F 是 DD_1 的中点时，$F\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{A_1E}=\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{B_1F}=\left(-1,-1,-\frac{1}{2}\right)$. 由 $\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{B_1F}=0$，知 $A_1E\perp B_1F$，A正确. 对于B，设 $F(0,\mu,\lambda)$，$0\leqslant\mu\leqslant 1$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则 $\overrightarrow{EF}=\left(-1,\mu-\frac{1}{2},\lambda\right)$，$\overrightarrow{B_1E}=\left(0,-\frac{1}{2},-1\right)$. 设平面 B_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{B_1E}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}y-z=0,\\ -x+y\left(\mu-\frac{1}{2}\right)+\lambda z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $x=\lambda-2\mu+1$，$y=-2$，所以 $\boldsymbol{n}=(\lambda-2\mu+1,-2,1)$. 易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1\neq 0$，所以不存在点 F，使得平面 $B_1EF\perp$ 平面 $ABCD$，B错误. 对于C，$A_1D_1\perp$ 平面 DD_1C_1C，所以 $A_1D_1\perp FD_1$，所以动点 F 到直线 A_1D_1 的距离等于 FD_1. 在平面 DD_1C_1C 内，动点 F 到点 D_1 的距离与到直线 DC 的距离相等，故其轨迹为抛物线，C错误. 对于D，点 F 在平面 DD_1C_1C（含边界）上运动，平面 B_1EF 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 总相交，交线为过 B_1 的一条直线 l，而在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，总可以作无数条平行于 l 的直线，所以这些直线都平行于平面 B_1EF，D正确.

故选AD.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

【命题意图】本题考查向量、向量的模、三角函数的性质等知识，考查运算求解能力及转化与化归思想.

【解题思路】因为 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(1,\cos x)+\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$\left(\frac{1}{2},\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)$，所以 $\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right|=\sqrt{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}}$. 又因为 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$，所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{4}$，故 $0\leqslant\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{4}\leqslant\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\leqslant\frac{3}{4}$，所以 $\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right|$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

14. $f(x)=-|x|$（答案不唯一）

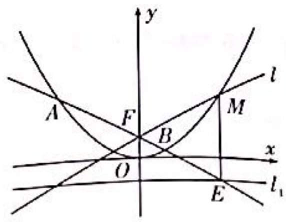
【命题意图】本题以开放题的形式，考查函数的概念、函数的奇偶性、导数等知识.

【解题思路】取 $f(x)=-|x|$，则 $f(mx)=-|mx|=-m|x|=mf(x)\ (m>0)$，满足①；$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f(-x)=f(x)$，满足②；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=-x$，$f'(x)=-1<0$，满足③. 故 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=-|x|$.（答案不唯一）

15. $\frac{4}{3}$

【命题意图】本题主要考查抛物线的方程与性质，考查运算求解能力和推理论证能力.

【解题思路】由题意知，抛物线 C 的焦点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，准线方程 $l_1:y=-\frac{p}{2}$. 因为 $ME\perp l_1$，所以 $|MF|=|ME|$. 由直线 l 的倾斜角为 $30°$，知 $\angle FME=60°$，故 $\triangle FME$ 为等边三角形. 易知直线 FE 的倾斜角为 $150°$，所以直线 FE 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{p}{2}$. 联立抛物线与直线的方程得 $\begin{cases}x^2=2py,\\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{p}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}p}{3},\\ y=\frac{p}{6}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}p,\\ y=\frac{3p}{2}.\end{cases}$ 如图所示，不妨设 A 点在第二象限，所以 $A\left(-\sqrt{3}p,\frac{3p}{2}\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}p}{3},\frac{p}{6}\right)$. 由抛物线的定义知 $|AB|=|FA|+|FB|=\left(\frac{3p}{2}+\frac{p}{2}\right)+\left(\frac{p}{6}+\frac{p}{2}\right)=\frac{8p}{3}$. 由直线 l 与直线 AB 的倾斜角可知，直线 l 与直线 AB 关于 y 轴对称，故 $M\left(\sqrt{3}p,\frac{3p}{2}\right)$. 又 $\triangle FME$ 为等边三角形，所以 $|EF|=|MF|=|ME|=\frac{3p}{2}+\frac{p}{2}=2p$. 故 $\frac{|AB|}{|EF|}=\frac{\frac{8p}{3}}{2p}=\frac{4}{3}$.



16. $\frac{37}{72}$　$\frac{n}{2}+\frac{3}{7}\left[1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right]$

【命题意图】本题以"掷骰子游戏"数学文化为背景，主要考查数列、事件概率的知识及数学建模能力.

【解题思路】一次掷两个骰子，点数之和大于7的概率为 $\frac{5}{12}$，不大于7的概率为 $\frac{7}{12}$. 第二次由甲掷骰子的概率为 $p_2=\frac{5}{12}$，第三次由甲掷骰子的概率为 $p_3=\frac{5}{12}p_2+\frac{7}{12}(1-p_2)=\frac{37}{72}$. 第 $(n+1)$ 次由甲掷骰子这一事件，包含两个事件：(1) 第 n 次由甲掷骰子，第 $(n+1)$ 次继续由甲掷骰子；(2) 第 n 次由乙掷骰子，第 $(n+1)$ 次由甲掷骰子. 前一事件发生的概率为 $\frac{5}{12}p_n$，后一事件发生的概率为 $\frac{7}{12}(1-p_n)$，所以 $p_{n+1}=\frac{5}{12}p_n+\frac{7}{12}(1-p_n)$，即 $p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$，所以数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是以首项为 $p_1-\frac{1}{2}$，公比为 $-\frac{1}{6}$ 的等比数列. 又 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$，即 $p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$，故 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{\frac{7}{6}}=\frac{n}{2}+\frac{3}{7}\left[1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right]$.

四、解答题：本题共6小题，共70分。

17.【命题意图】本题考查数列通项公式、前 n 项和等知识，考查运算求解能力.

【解题思路】(1) 因为 $S_{n+1}-a_{n+1}=(n+1)^2-1$，

所以 $S_{n+1}-S_n-a_{n+1}+a_n=2n+1$，而 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，

所以 $a_n=2n+1$，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$. ……… (4分)

(2) 由 $b_n=a_n\cdot\cos\frac{n\pi}{2}=(2n+1)\cdot\cos\frac{n\pi}{2}$，得 $T_4=b_1+b_2+b_3+b_4=3\cos\frac{\pi}{2}+5\cos\frac{2\pi}{2}+7\cos\frac{3\pi}{2}+9\cos\frac{4\pi}{2}=3\times0+5\times(-1)+7\times0+9\times1=4$.

对 $\forall k\in\mathbf{N}^*$，$I_k=b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}=(8k-5)\cdot\cos\frac{(4k-3)\pi}{2}+(8k-3)\cos\frac{(4k-2)\pi}{2}+(8k-1)\cdot\cos\frac{(4k-1)\pi}{2}+(8k+1)\cos\frac{4k\pi}{2}=(8k-5)\times0+(8k-3)\times(-1)+(8k-1)\times0+(8k+1)\times1=4$.

所以 $T_{50}=I_1+I_2+\cdots+I_{12}+b_{49}+b_{50}=12\times4+99\times\cos\frac{49\pi}{2}+101\times\cos\frac{50\pi}{2}=48+0-101=-53$.

故 $T_4=4$，$T_{50}=-53$. ………………………………（10分）

18.【命题意图】本题考查事件概率、随机变量的分布列及数学期望.

【解题思路】设甲、乙、丙、丁下潜作业完成任务的事件分别为 A,B,C,D，则 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(C)=0.7$，$P(D)=0.8$.

(1)按甲、乙、丙、丁的先后顺序下潜作业，任务能被完成的概率为 $P=P(A)+P(\bar{A})P(B)+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})P(D)=0.5+0.5\times0.6+0.5\times0.4\times0.7+0.5\times0.4\times0.3\times0.8=0.988$. …………（4分）

(2)由题意，X 的可能取值为1,2,3,4. 按丙、甲、乙、丁的先后顺序下潜作业，$P(X=1)=P(C)=0.7$，$P(X=2)=[1-P(C)]\times P(A)=(1-0.7)\times0.5=0.15$，$P(X=3)=[1-P(C)]\times[1-P(A)]\times P(B)=(1-0.7)\times(1-0.5)\times0.6=0.09$，$P(X=4)=[1-P(C)]\times[1-P(A)]\times[1-P(B)]=(1-0.7)\times(1-0.5)\times(1-0.6)=0.06$，所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	0.7	0.15	0.09	0.06

所以 X 的数学期望 $E(X)=1\times0.7+2\times0.15+3\times0.09+4\times0.06=1.51$. ………………（9分）

(3)按丁、丙、乙、甲的先后顺序下潜作业，可使需要下潜人数的数学期望达到最小. ………………（12分）

证明如下：甲、乙、丙、丁各自完成任务的概率分别为0.5,0.6,0.7和0.8，设 p_1,p_2,p_3,p_4 为4人各自独立能完成任务的概率的一个排列，则需要下潜人数的数学期望 $E(X)=1\times p_1+2\times(1-p_1)\times p_2+3\times(1-p_1)\times(1-p_2)\times p_3+4\times(1-p_1)\times(1-p_2)\times(1-p_3)=(1-p_1)[(1-p_2)(2-p_3)+1]+1$，显然 $E(X)$ 要达到最小，p_1,p_2,p_3 须是0.5,0.6,0.7,0.8中较大的三者，即 p_1,p_2,p_3 是0.6,0.7,0.8的一个排列. 易知当 $p_1=0.8$，$p_2=0.7$，$p_3=0.6$ 时，$E(X)$ 取最小值，即按丁、丙、乙、甲的先后顺序下潜作业，可使需要下潜人数的数学期望达到最小.

19.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、解三角形等知识，考查运算求解能力及转化与化归思想.

【解题思路】(1)由 $\angle BED=60°$ 知 $\angle AEB=120°$.

在 $\triangle ABE$ 中，由余弦定理得 $|AB|^2=|AE|^2+|BE|^2-2|AE|\cdot|BE|\cdot\cos\angle AEB$，即 $(2\sqrt{7})^2=4^2+|BE|^2-2\times4\times|BE|\cdot\cos120°$，整理得 $|BE|^2+4|BE|-12=0$，解得 $|BE|=2$ 或 $|BE|=-6$（舍去），所以 $\triangle ABE$ 的面积 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}|AE|\cdot|BE|\cdot\sin120°=2\sqrt{3}$. ……（5分）

(2)在 $\triangle BED$ 中，由余弦定理得 $|BD|^2=|BE|^2+|ED|^2-2|BE|\cdot|ED|\cdot\cos\angle BED$，即 $3^2=2^2+|ED|^2-2\times2\times|ED|\times\frac{1}{2}$，整理得 $|ED|^2-2|ED|-5=0$，

解得 $|ED|=\sqrt{6}+1$ 或 $|ED|=-\sqrt{6}+1$（舍去）.

在 $\triangle BED$ 中，由正弦定理得 $\frac{|BE|}{\sin\angle BDE}=\frac{|BD|}{\sin60°}$，

故 $\sin\angle BDE=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $BD>BE$，所以 $\angle BDE<60°$，则 $\angle BDE$ 为锐角，

所以 $\cos\angle BDE=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

在 $\triangle DAC$ 中，$\angle DAC=\angle BDE-\angle C=\angle BDE-30°$，所以 $\sin\angle DAC=\sin(\angle BDE-30°)=\sin\angle BDE\cdot\cos30°-\cos\angle BDE\cdot\sin30°=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

在 $\triangle DAC$ 中，由正弦定理得 $\frac{|DC|}{\sin\angle DAC}=\frac{|AD|}{\sin30°}$，

所以 $|DC|=2(|AE|+|ED|)\times\sin\angle DAC=2(5+\sqrt{6})\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=3-\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ………………（12分）

20.【命题意图】本题考查线面平行、空间向量的应用、棱锥的体积、二面角等知识，考查运算求解能力及转化与化归思想.

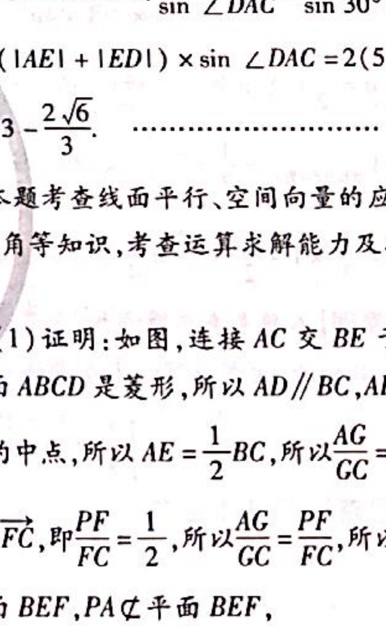
【解题思路】(1)证明：如图，连接 AC 交 BE 于 G，连接 FG. 因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD\parallel BC$，$AD=BC$.

又 E 为 AD 的中点，所以 $AE=\frac{1}{2}BC$，所以 $\frac{AG}{GC}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$.

因为 $\overrightarrow{PF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，即 $\frac{PF}{FC}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{AG}{GC}=\frac{PF}{FC}$，所以 $PA\parallel FG$

又 $FG\subset$平面 BEF，$PA\not\subset$平面 BEF，

所以 $PA\parallel$平面 BEF. ………………………（5分



(2)在$\triangle ABE$中，$|AB|=1$，$|AE|=\frac{1}{2}$，$\angle BAE=60°$，所以由余弦定理得$|BE|^2=|AE|^2+|AB|^2-2|AE|\cdot|AB|\cdot\cos 60°=\frac{1}{4}+1-2\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，即$BE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$|AB|^2=|AE|^2+|BE|^2$，所以$AE\perp BE$.

如图，以E为坐标原点，EA所在直线为x轴，EB所在直线为y轴，EP所在直线为z轴，建立空间直角坐标系. 令$|PE|=a(a>0)$，则$E(0,0,0)$，$A\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$B\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$P(0,,a)$，所以$\overrightarrow{EB}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{PA}=\left(\frac{1}{2},0,-a\right)$. 因为$AE\perp PE$，$AE\perp BE$，$PE\cap BE=E$，所以$AE\perp$平面$PBE$，所以平面$PBE$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,0)$. ……………………………… (9分)

设平面BEF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EB}$，可得$y=0$.

因为$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{FG}$，$PA\parallel FG$，所以$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PA}$，

即有$\frac{1}{2}x+0\times y-az=0$，令$z=1$，则$x=2a$，

所以$\boldsymbol{n}=(2a,0,1)$. 由二面角$P\text{-}BE\text{-}F$的平面角为30°，

得$\cos 30°=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2a|}{1\times\sqrt{1+4a^2}}$，即$\frac{|2a|}{\sqrt{1+4a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$(负值舍去)，所以$|PE|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$V_{四棱锥P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}S_{菱形ABCD}\times|PE|=\frac{1}{3}|AD|\times|BE|\times|PE|=\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}$. ………………… (12分)

21.【命题意图】 本题考查椭圆方程、向量等综合知识，考查推理论证能力、运算求解能力及转化与化归思想.

【解题思路】(1)由题意得$\begin{cases}\frac{a^2}{3}=c,\\ \frac{3}{2a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$整理得$2a^4-21a^2+45=0$，即$(a^2-3)(2a^2-15)=0$，解得$a^2=3$或$a^2=\frac{15}{2}$. 当$a^2=3$时，$b^2=2$，$c^2=1$，此时$C$的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{2}{3}$，符合题意；当$a^2=\frac{15}{2}$时，$b^2=\frac{5}{4}$，$c^2=\frac{25}{4}$，此时$C$的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{30}}{6}>\frac{2}{3}$，不合题意，舍去. 所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………… (4分)

(2)当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=kx+2$，联立$\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$得$(2+3k^2)x^2+12kx+6=0$.

因为直线l与椭圆C分别交于不同的两点A,B，

所以$\Delta=(12k)^2-24(2+3k^2)>0$，整理得$k^2>\frac{2}{3}$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{12k}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{6}{2+3k^2}$，所以$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(x_1,y_1-2)\cdot(x_2,y_2-2)=x_1x_2+(y_1-2)(y_2-2)=x_1x_2+kx_1\cdot kx_2=(1+k^2)x_1x_2=(1+k^2)\times\frac{6}{2+3k^2}=\frac{6+6k^2}{2+3k^2}$.

因为$k^2>\frac{2}{3}$，所以令$y=\frac{6+6x}{2+3x}\left(x>\frac{2}{3}\right)$，则$x=\frac{6-2y}{3y-6}(y\neq2)$. 由$\frac{6-2y}{3y-6}>\frac{2}{3}$，得$2<y<\frac{5}{2}$，即$2<\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}<\frac{5}{2}$.

因为$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\lambda|\overrightarrow{OQ}|^2=4\lambda$，所以$2<4\lambda<\frac{5}{2}$，解得$\frac{1}{2}<\lambda<\frac{5}{8}$.

当直线l的斜率不存在时，直线l的方程为$x=0$，此时直线l与椭圆C的两交点分别为$(0,\sqrt{2})$，$(0,-\sqrt{2})$. 不妨取$A(0,\sqrt{2})$，$B(0,-\sqrt{2})$，则$\overrightarrow{QA}=(0,\sqrt{2}-2)$，$\overrightarrow{QB}=(0,-\sqrt{2}-2)$，所以$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=2$，所以$4\lambda=2$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$.

综上所述，λ的取值范围为$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)$. ……… (12分)

22.【命题意图】 本题考查导数的应用、不等式、极值等综合知识，考查推理论证能力、运算求解能力及转化与化归思想.

【解题思路】(1)由题意得$f'(x)=a+e^{x-1}+xe^{x-1}$.

当$a=e-2$时，$f(1)=a+1=e-1$，$f'(1)=e$，

故曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线l的方程为$y=ex-1$.

易知当$|PQ|$取最小值时，点Q是曲线$y=\ln x$上切线斜率为e的点，由$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$可得$Q\left(\frac{1}{e},-1\right)$，

所以$|PQ|$的最小值为点Q到直线l的距离，

即$|PQ|_{\min}=\frac{1}{\sqrt{e^2+1}}=\frac{\sqrt{e^2+1}}{e^2+1}$. ……………… (4分)

(2)因为对任意$x\in(0,+\infty)$，恒有$f(x)>e^{x-1}\ln(ax)+$

$2e^{x-1}$成立，所以$\frac{ax}{e^{x-1}}-\ln(ax)+x-2>0$在$x\in(0,+\infty)$上恒成立. 记$g(x)=\frac{ax}{e^{x-1}}-\ln(ax)+x-2, x\in(0,+\infty)$，则对任意$x\in(0,+\infty)$，$g(x)>0$恒成立.

$$g'(x)=\frac{\left(\frac{e^{x-1}}{x}-a\right)(x-1)}{e^{x-1}}.$$

记$h(x)=\frac{e^{x-1}}{x}-a, x\in(0,+\infty)$，

则$h'(x)=\frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}$，

当$h'(x)>0$时，$x>1$；当$h'(x)<0$时，$0<x<1$，

所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，则$h(x)_{\min}=h(1)=1-a$，

①当$0<a<1$时，$h(x)\geqslant h(x)_{\min}>0$恒成立，

所以当$x>1$时，$g'(x)>0$；当$0<x<1$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，则$g(x)_{\min}=g(1)=a-\ln a-1$.

记$\varphi(a)=a-\ln a-1, a\in(0,1)$，则$\varphi'(x)=1-\frac{1}{a}<0$，

所以$\varphi(a)$在$(0,1)$上单调递减，所以当$0<a<1$时，$\varphi(a)>\varphi(1)=0$，即$g(x)_{\min}=a-\ln a-1>0$，

故对任意$x\in(0,+\infty)$，$g(x)>0$恒成立.

故对任意$x\in(0,+\infty)$，恒有$f(x)>e^{x-1}\ln(ax)+2e^{x-1}$成立. ………………………………………… (7分)

②当$a=1$时，$g(1)=0$，不满足题意.

③当$a>1$时，$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，此时$h(x)_{\min}=1-a<0$.

当$x=1$时，$e^{x-1}<ax$，所以当$x\in(1,+\infty)$时，由指数函数与一次函数的增长速度可知，$\exists m\in(1,+\infty)$，当$x>m$时，有$e^{x-1}>ax$，即$\exists x_0\in(1,+\infty)$，使得$h(x_0)>0$，

所以$h(x)$在$(1,+\infty)$上有一个零点，记为x_1，则$h(x_1)=\frac{e^{x_1-1}}{x_1}-a=0$，即$e^{x_1-1}=ax_1$，所以$g(x_1)=\frac{ax_1}{e^{x_1-1}}-\ln(ax_1)+x_1-2=1-x_1+1+x_1-2=0$，不满足题意.

综上所述，实数a的取值范围是$(0,1)$. …… (12分)