立信财经丛书

投资数学

资金时间价值计算

刘[illegible]文 编

立信财经丛书

投 资 数 学

——资金时间价值计算

刘敏文 编

立信会计图书用品社

(沪)新登字 304 号

封面设计：丁世华

立信财经丛书

投资数学——资金时间价值计算

刘敏文 编

立信会计图书用品社出版发行

（上海中山西路 2230 号）

邮政编码 200233

新華書店经销

上海师范大学印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 5.875·字数 131,000

1991 年11月第 1 版 1991 年11月第 1 次印刷

印数 1—5.000

ISBN 7-5429-0106-6/F·0104

定价：3.60元

内 容 介 绍

钞票里面生钞票人人期望。手中有钱是购买债券还是储蓄?怎样存钱才能得到更多利息?复利与单利有什么区别?怎样计算债券投资收益?购买商品房是分期付款合算还是一次付款合算?欲花钱而无现款时是贴现还是借债?欠人债怎样偿还有利?“还本销售”推销商品的条件是什么?投资效益怎样评价?本书都能给你满意的答复。不要说计算烦,会按键就能算。手持一只电子计算器,自己算得的答案最可信。

本书可作家庭用钱指南;可作经营管理参谋;可作经济专业学生教材;可帮助你拥有现代经济头脑。

序　言

长期以来，我国通用的是单利计息。改革开放以来，我国的经济活动日益丰富。筹集外国资金、长期投资评估、证券投资交易、租赁和保险业务的精算、分期付款购买商品房屋等等，这些经济活动都要求采用国际通用的复利计算方法。

简单的复利计算方法可以概括为六个公式。使用这些公式的前提是，资金发生的间隔时期与复利计息的期限必须同步。实际经济生活千变万化。企业天天有收支，养老金月月要取用，家庭季季欲储蓄，筹资年年需还贷；使用的复利计息期限又决不可能与各种年金发生的间隔期相同。必须解决在这种情况下的计算理论，才能使复利计算方法有实际的应用价值。《投资数学——资金时间价值计算》恰在此时出版，并很好地解决了上述问题。一本书能解答一个这样的实际问题，就是很有价值的了。

该书系统地阐述了投资数学中最主要的问题——资金时间价值的计算。其比较显著的二个特点是：(1) 密切结合经济实际，有浓厚的生活气息，不似纯粹的数学书那么枯燥。该书说理透彻、博引旁证。举凡储蓄贴现、养老保障、分期付款、还本销售、租金支付、筹资偿还、债券投资、投资效益评价、损益平衡分析等等都有述及，可谓雅俗共赏。(2) 运用现代计算工具，使计算操作简便易行。复利计算中要用到高次乘方和开方以及对数和反对数等等的运算，传统的计算方法是借助于大量的数学用表。而该书则运用电子计算器为主要计算工具来替代传统的查表运算，就使叙述简洁、运算方便，能被具有中等文化程度的读者所理解、接受和应用。

因此，该书既可用作大中专经济管理类专业学生的教

材，亦不失为各级经济管理人员当家理财的好助手，一切希望有现代经济头脑的人们的好读物。故乐为之作序。

李鸿寿

一九九一年四月

前　言

资金时间价值的计算，是投资数学的重要组成部分。在本书中，钞票、货币、资金是同义语，不讨论这三个概念理论上的区别，只讨论资金时间价值的计算。

在经济活动中，由于利息的作用，货币的值是随时间的变化而变化的。现在的一元钱，随着时间的推移，在一定时间后，就会不止一元钱了。因为人们可以通过一定的经济活动 (储蓄或投资)，使现在的一元钱谋取到一定数量的利息或利润，到日后就成为一元多钱。可以说，今年的一元钱比明年的一元钱更值钱。这种货币随时间的推移而增殖的现象是普遍存在的。由此我们认识到资金具有时间价值。

把钱存入银行，相当于在一定时间内牺牲了自己对这些钱的使用权利，失去了消费机会。对这种牺牲的报酬是存款人得到利息。把钱用于投资，也是牺牲当前的消费而谋求未来的收益。投资者得到的报酬是利润。在经济活动中，利息和利率的概念得到推广。利率不光是储蓄的利息率，也可是借贷活动的利息率或投资活动的收益率。同一货币在不同时点的价值大小取决于利率和时间。

承认资金的时间价值并在经济计划、决策工作中加以应用，对合理地有效地利用资金具有重要意义。本课程是应用学科。它所讨论的资金时间价值的各种计算方法，在银行、保险、财务、会计、计划、投资等等的经济管理实务中有广泛的应用。在介绍各种计算方法时，本书列举了大量的实例，最后一章又专门讲了资金时间价值的应用。需要指出的是，这些

都只是举例，没有也不可能穷尽其应用范围和形式。

本书写成以后，我国会计界德高望重的老前辈李鸿寿教授，拨冗为本书撰写了序言。在此谨表由衷的谢意。

还要感谢立信会计图书用品社的编审同志，为本书出版付出的大量劳动和宝贵意见。

由于时间仓促，水平有限，本书一定存在不少缺点和错误，竭诚希望批评指正。

编者

一九九一年四月

目　录

第一章　单利……1
　第一节　单利利息……1
　　一、利息与利息率……1
　　二、单利利息公式……1
　　三、利息率的表示方法及换算……2
　　四、计息周期数的计算……4
　第二节　单利的本利和……7
　　一、单利本利和公式……7
　　二、单利现值……8
　　三、单利贴现……9
　　四、名义利率和真利率……11
　第三节　单利年金……12
　　一、单利期初年金终值……13
　　二、单利期末年金终值……14
　　三、单利期初年金现值……17
　　四、单利期末年金现值……19
第二章　复利……25
　第一节　复利的计算……25
　　一、复利本利和和利息……25
　　二、复利的实际利率和名义利率……26
　　三、复利基本公式的展开……28
　　四、复利现值和贴现……31
　　五、复利贴现的真利率……32
　第二节　复利年金终值……34
　　一、复利期初年金终值……35

二、复利期末年金终值……………………………………40
三、复利年金终值的年金、时期的求法…………………43
第三节 复利年金现值…………………………………………45
一、复利期初年金现值……………………………………45
二、复利期末年金现值……………………………………49
第四节 连续复利和连续年金………………………………53
一、连续复利的概念…………………………………………53
二、连续复利的计算…………………………………………54
三、连续复利的名义利率和实际利率…………………55
四、连续年金……………………………………………………55
五、连续复利年金……………………………………………60
六、连续年金连续复利……………………………………62
第五节 复利表……………………………………………………64
一、复利表结构和用法……………………………………64
二、应用复利表求利息率…………………………………68
第三章 特殊年金…………………………………………………83
第一节 延期年金………………………………………………83
一、延期年金概述……………………………………………83
二、先延 w 期,后发生年金 n 期…………………………85
三、先发生年金 n 期,后延 w 期…………………………90
四、年金发生的中间有间断 w 期………………………91
第二节 变额年金………………………………………………93
一、变额年金的概述…………………………………………93
二、不规则变额年金…………………………………………94
三、等比年金……………………………………………………95
四、等差年金……………………………………………………98
第三节 永久年金………………………………………………100
一、期末永久年金现值……………………………………100
二、期初永久年金现值……………………………………102

三、提取次数变化时的期末永久年金现值……………102
第四章　资金时间价值的应用…………………………106
第一节　投资方案经济效果评价……………………106
一、现值法…………………………………………106
二、年值法…………………………………………110
三、投资收益率法…………………………………114
四、投资回收期法…………………………………118
第二节　偿债…………………………………………120
一、提存储积法……………………………………120
二、分期偿还法……………………………………124
三、“气球法”还款的本息分解……………………130
四、平均付款期和平均付款值……………………132
第三节　还本销售……………………………………133
一、商品保本保利储存期…………………………134
二、商品储存的保本利息率………………………136
三、还本销售的偿还………………………………137
第四节　债券…………………………………………138
一、债券概述………………………………………138
二、一次还本付息债券的实际收益率……………141
三、定期付息到期还本债券的实际收益率………142

主要参考书目…………………………………………149
附表Ⅰ　年金终值系数表……………………………150
附表Ⅱ　年金现值系数表……………………………158
附表Ⅲ　偿债基金系数表……………………………164
附表Ⅳ　资金回收系数表……………………………168
附表Ⅴ　复利和贴现表………………………………170

第一章　单　利

第一节　单利利息

一、利息与利息率

利息是使用他人资金所付出的费用。反言之，利息是出让自己的资金使用权所获得的报酬。使用他人资金或出让自己资金使用权都有时间的限制。所以，利息是在借贷活动中，债务人在一定时间内为取得货币使用权而向债权人支付的超过原借款金额的部分。

原借款金额亦称为本金或母金。相对应地，利息亦称为利金或子金。

每单位时间（即一定时间内）的利息额同存入或贷出的本金之比，称为利息率，用百分数表示：

$$利息率=\frac{每单位时间的利息额}{本金}\times 100\%$$

两次计算利息之间的时间间隔称为计息周期，通常为一年，也有半年、一个季度、一个月、一周甚至一天的。当计息周期趋向无穷小时，就是连续计息的情况。

利息的大小是由本金、利息率和计息周期次数三个要素决定的。利息的计算方法有单利计息和复利计息两种。

二、单利利息公式

单利计息就是仅按最初本金计算利息，利息不并入本金生利。其利息计算公式为：

$$I=P\cdot n\cdot R \tag{1—1}$$

式中：I　利息（元）；

P　本金(元)；

n　计息周期数；

R　每期利息率(% 或 ‰)。

我国居民储蓄和国库券都是按单利计息。

[例 1] 1989 年 4 月 1 日起，我国工商银行的定期储蓄的月利率如下表：

定期储蓄期限	三个月	六个月	1 年	2 年	3 年	5 年	8 年
月利率(‰)	6.3	7.5	9.45	10.20	10.95	12.45	14.70

求：本金 1000 元分别存满上述期限可以得到的利息。

解：利息率以月为单位，故上述存期应换算成相应的月数，再用公式 1—1，求解利息。见下表：

定期储蓄期限	三个月	六个月	1 年	2 年	3 年	5 年	8 年
换算月数:n	3	6	12	24	36	60	96
月利率(‰):R	6.3	7.5	9.45	10.20	10.95	12.45	14.70
本金(元):P	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
利息(元):I＝PnR	18.9	45	113.4	244.8	394.2	747	1141.2

三、利息率的表示方法及换算

由于计息的时间间隔不同，利息率的表示方法也不同。计息周期分别为年、月、日，相对应的利息率分别是年利率、月利率、日利率、亦分别称为年息率、月息率和日息率。

年息率按本金的百分之几表示；月息率按本金的千分之几表示；日息率按本金的万分之几表示。我国习惯上用分、厘、毫来表示利息率。在用分、厘、毫表示利率时，一定要和年息、月息、日息同时使用，否则没有任何意义。例如，年息 6 厘、月息 6 厘和日息 6 厘，分别表示为年息率 6%，月息率 6‰ 和日息率 0.6‰。同样，年息 1 分 2 厘、月息 1 分 2 厘、日

息 6 厘 5 毫，分别以年息率 12%，月息率 12‰（或 1.2%）和日息率 0.65‰ 表示等等。

计息时间要和利息率表示法一致，是计算利息的基本要求。有时，计息周期数不一定是整数，为求得计息时间和利息率表示法的一致，要作年息率、月息率和日息率之间进行换算。其换标关系通常是：

年息率 ÷12＝月息率；月息率 ÷30＝日息率；

年息率 ÷360＝日息率；日息率 ×360＝年息率；

日息率 ×30＝月息率；月息率 ×12＝年息率。

[例 2] 根据例 1 的已知条件，求一年期的定期储蓄的年息率和日息率，用习惯表示法表示。

解：年息率＝月息率×12＝9.45‰×12＝11.34%

日息率＝月息率÷30＝9.45‰÷30＝3.15‰

答：年息率是 1 分 1 厘 3 毫 4，或 11.34 厘；

日息率是 3 厘 1 毫 5，或 3.15 厘。

[例 3] 按中国工商银行规定，居民定期储蓄在不满约定存期的情况下，按实际存期的月利率档次按日计息；在存满约定存期的条件下，按约定存期的月利率档次按日计息。现有甲某存 1000 元约定存一年，到期未取，实存二年三个月十二天；乙某存 1000 元，约定存三年，提前取款，实存二年三个月十二天。求甲、乙两人取款时，实际得到的利息。

解：甲约定存一年，期满后，不管实存期限，都按一年期的挡次计息。则：

$I_{甲}=1000\times(2\times11.34\%+3\times9.45‰+12\times3.15‱)=258.93$ 元

乙约定存三年，提前取款，按实存档即二年期的档次计息。则：

$I_{乙}=1000\times(27\times10.20‰+12\times10.20‰\div30)=279.48$ 元

答：甲、乙两人所得利息分别为 258.93 元和 279.48 元。

四、计息周期数的计算

$$计息周期数=\frac{实际借贷时间}{计息单位时间}$$

由于利息率可以换算成日息率，即以日作为计息单位时间，则上述公式中，主要是求实际借贷时间。

对于日数的计算，实行计首不计尾或计尾不计首的原则。如由 4 月 20 日至 5 月 18 日只算 28 日，因 4 月 20 日及 5 月 18 日二天之中，有一天不计利息。年数和月数的计算亦然。实际计算中，有关年月日的换算要与利息率的换算法相对应。如采取前面介绍的 360 日换算法，则不论平年、闰年、一律按 360 天计算，不论大月、小月、平月一律按 30 天计算。实存天数的计算，有年月日同减法和计息积数法等方法。

1. 年月日同减法

年月日同减法一般适用于定期借贷，计算一笔本金的借贷时期。

$$\begin{aligned}实存天数=&360\times(支取年—存入年)+30\times(支取月—存入月)\\&+(支取日—存入日)\end{aligned}$$

[例 4]　一笔存款 1983 年 4 月 18 日存入，1985 年 3 月 15 日支取，求其实存天数。

解：$360\times(1985-1983)+30(3-4)+(15-18)=720-30-3=687$天

2. 计息积数法　　计息积数法一般适用于借贷频繁的活期借贷的定期计息。其基本思路是把一定期内的借贷余额转化成借期为一天的本金，再乘以日息率得到一定期内的利息。将借贷余额乘以余额天数即是借期为一天的本金，也即是计息积数。

[例 5]　某商店“银行借款”帐户的记载如下，试计算 6 月份利息。（月息率 4 厘 2 毫）

银 行 借 款　　　　单位:元

日 期	增 加	减 少	余 额
6月1日			50000
6月5日	20000		
6月11日		25000	
6月23日	15000		

解: 日息率＝0.0042÷30＝0.00014

计息积数 (余额×天数) 可用下表求得:

计息积数表　　　　单位:千元·天

日 期	增 加	减 少	余额(元)	天 数	积数(千元·天)
6月1日			50000	4	200
6月5日	20000		70000	6	420
6月11日		25000	45000	12	540
6月23日	15000		60000	8	480
月结(6月30日)	35000	25000	60000	30	1640

全月借款数相当于 164 万元本金借期1 天。所以 6 月份利息为:

$$I=1640000\times1\times0.00014=229.6 \text{ 元}$$

以上介绍的利息率的换算和年月日的换算是通常使用的近似计算法。如要精确计算，即按实际的日历天数计算计息周期，则一年有 365 天或 366 天，其相应采用的日息率等于年息率除以 365 (或 366)。这种算法很少采用，本教材如无特别说明，都是采用前一种通常计算法。

有时，利息率有变化，此时计算计息周期要与变化中的利息率相对应。

[例6]　中国工商银行 1979 年 4 月 1 日起月息率 3厘 3；1980 年 4 月 1 日起月息率提高到 4 厘 5；1982 年 4 月 1

日起月息率再调整为 4 厘 8(以上都是一年期的定期存款月息率)。甲某 1980 年 3 月 11 日存 400 元，约定存期一年，实际于 1983 年 7 月 11 日取出。求:甲某可得的利息。

解:这 400 元本金按一年期的利息率计算，实际上有三种不同利率，即:

$R_1=0.0033/$ 月，

$R_2=0.0045/$ 月；

$R_3=0.0048/$ 月。

其相对应的存期(计息周期)分别是:

$n_1=$80 年 4 月 1 日 —80 年 3 月 11 日 =20 天

$n_2=$82 年 4 月 1 日 —80 年 4 月 1 日 = 2 年 =720 天

$n_3=$83 年 7 月 11 日 —82 年 4 月 1 日 =1 年 3 月 10 天 =460 天

$$I=I_1+I_2+I_3=Pn_1R_1+PN_2R_2+PN_3R_3$$
$$=P(n_1R_1+n_2R_2+n_3R_3)$$
$$=400(20\times\frac{0.0033}{30}+720\times\frac{0.0045}{30}+460\times\frac{0.0048}{30})$$
$$=400\times0.1838$$
$$=73.52\text{元}$$

综合例 3 和例 6，单利的利息计算，公式可以扩展为:

$$I=P\sum_{i=1}^{k}n_iR_i \tag{1—2}$$

当 $k=1$ 时，即是公式 1—1: $I=PnR$。

第二节　单利的本利和

一、单利本利和公式

借贷活动中，往往要求本金与利息之和。即借一笔款后，经过若干时间还款总额是多少。这里的还款总额包括本金和利息，简称为本利和。以 S 记为本利和，则单利本利和的计算公式为:

$$S=P+I=P+PnR=P(1+nR) \qquad (1-3)$$

[例 7]　求前面例 1、例 3、例 6 各项存款的本利和。

解: 例 1 的各储蓄期的本利和见下表:

定期储蓄期限	三个月	六个月	1 年	2 年	3 年	5 年	8 年
换算月数: n	3	6	12	24	36	60	96
月利率 (‰): R	6.3	7.5	9.45	10.20	10.95	12.45	14.70
本金 (元):P	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
本利和(元)S=P(1+nR)	1018.9	1045	1113.4	1244.8	1394.2	1747	2411.2

例 3: $S_{甲}=P_{甲}+I_{甲}=1000+258.93=1258.93$元

$S_{乙}=P_{乙}+I_{乙}=1000+279.48=1279.48$元

例 6: $S=P(1+nR)=400\ (1+0.1838)$

$=400\times1.1838=473.52$元

为鼓励长期储蓄，稳定经济，回笼货币，并维护储户个人利益，中国人民银行自 1988 年 9 月 10 日起，对三年以上定期储蓄给于保值贴息。年保值贴息率由中国人民银行定期公布。

保值贴息＝本金×实存天数×(年保值贴息率 ÷ 360)

公式中实存天数是指自 1988 年 9 月 10 日起，至存款到期日止的天数。

[例 8]　现有 1985 年 12 月 1 日存入的三年定期存款 100 元，月息率 8 厘 1 毫。1988 年第 4 季度的三年期保值贴

息率为 7.28%。求：1988 年 12 月 1 日到期时的本利和。

解：不考虑保值贴息，这笔存款的本利和：

$S_1=100\times(1+36\times0.0081)=100\times1.2916=129.16$ 元

还应支付从 1988 年 9 月 10 日到 1988 年 12 月 1 日共 81 天的保值贴息：

$100\times81\times(0.0728\div360)=1.64$ 元。

所以这笔存款的本利和是：

$$S=100\times(1+36\times0.0081+81\times\frac{0.0728}{360})=130.80\text{ 元}$$

二、单利现值

现值者，对于将来到期之款项，求其现在应支付的数额。即将来到期可得本利和若干，按某种利率与时期计算，以求现在应支付的本金。换言之，即是在公式1—3 中，已知 S,n,R 求 P，则：

$$P=\frac{S}{1+nR} \tag{1—4}$$

相对而言，本利和即是现值（本金）在一定利率下若干时期后的终值。

如果现值记为 Q，则单利终值和现值之间的关系为：

$S=Q(1+nR)$

$$Q=\frac{S}{1+nR}$$

［例 9］ 推销商品有一种策略称“还本销售”。现在买一架某种型号的收录机，现价 1000 元，8 年后凭发票由商店退还顾客 1000 元。按 8 年定期储蓄利率计算，该收录机实际现价是多少：

解法一：从例 7 中得到 1000 本金 8 年后的终值是

2411.2元，还款1000元，该收录机8年后的终值1411.2元折算成现值。即：

$1411.2 \div (1+96\times 0.0147)=1411.2\div 2.4112$

$=585.27$ 元

解法二：8年后的1000元，折算成现值，再从现在的1000元中减去。即：

$1000-1000\div 2.4112=1000-414.73=585.27$ 元

这个例子告诉我们，由于货币的时间价值起作用，"还本"是不能"保本"的。同时，还告诉我们不同时点的货币（或资金）不能直接相加减，要换算到同一时点上，才能再加减。将一定时点的货币，按确定的利率在不同时点之间进行换算，称为等价值计算。

三、单利贴现

贴现，即是借款时，在本金内预先扣除利息，借期满只还本金。扣除的利息称为贴现息，简称贴息，记为D；本金扣除贴息的余额称为兑现额，简称兑现，记为Q_D。单利贴息的计算与单利利息的公式相同。则：

$$D=P.n.R \tag{1—5}$$

$$Q_D=P-D=P-PnR=P(1-nR) \tag{1—6}$$

上二式中，P、n、R的含意与前述相同。

［例10］ 现欲借款1000元，年息率9厘，时期2年。求：贴息和兑现。

解：$D=1000\times 2\times 9\%=180$ 元

$Q_D=1000\times(1-2\times 0.09)=1000\times 0.82=820$ 元

这笔钱如果不是用贴现的方法借，而是两年以后还本付息，则利息也是180。很显然，经过二年后，这两个180元是不相等的。

在经济流通中，有一种商业信用的远期支票，即已经签

发的指定在未来的某个日期生效的支票。购货方开出的远期支票，经背书可以在市面流通。如果持票者在指定的期限前要求兑现，需向银行贴付利息，这种付息取款方式称为银行贴现。银行扣去自兑现日至支票到期日的贴现利息，然后将票面余额兑现支付给持票人。票据到期后，银行凭票向最初发票的债务人或背书人兑取现款。贴息和兑现额的计算，用公式 1—5 和公式 1—6。

[例 11] 面值 5000 元的支票，20 天后到期，银行以单利月息率 6 厘计息。求:贴息和兑现额。

解: $D=5000\times 20\times(0.006\div 30)=20$ 元

$Q_D=5000-20=4980$ 元

从例 10 和例 11 都可以看出，兑现额 Q_D 不等于现值 Q。例 11 中 5000 元 20 天前的现值在单利月息率 6 厘的条件下等于:

$$Q=\frac{P}{1+nR}=\frac{5000}{1+20\times 0.0002}=4980.08\text{ 元}$$

很显然，$Q>Q_D$。Q 与 Q_D 的关系可作如下证明:

$$Q-Q_D=\frac{P}{1+nR}-P(1-nR)$$

$$=\frac{P[1-(1-n^2R^2)]}{1+nR}$$

$$=\frac{Pn^2R^2}{1+nR}>0$$

这说明，兑现额总是小于现值。

我国的国库券不可以提前领取，但可以兑现。即相当于远期支票。假定年息率 1 分，借期 5 年，面值 100 元，5 年后相当于 150 元。又假定储蓄年息率 1 分，1 年以后随时可取。现将储蓄、5 年终值 150 元的历年现值、国库券兑现比较如

下:

	当年	1年后	2年后	3年后	4年后	5年后
储蓄: $P=100$　$S=P(1+nR)$	100	110	120	130	140	150
现值: $S=150$　$Q=S/(1+nR)$	100	107.14	115.38	125	136.36	150
兑现: $S=150$　$Q_D=S(1-nR)$	100	90	105	120	135	150

四、名义利率和真利率

贴息业务中,兑现额恒小于现值的原因,是存在两个利率。$D=PnR$ 中的 R 是名义利率。实际的利率称真利率用 R_D 表示。按照利率的定义应当是:

$$R_D=\frac{D}{Q_D\cdot n}=\frac{P.n.R}{P(1-nR)\cdot n}=\frac{R}{1-nR} \qquad (1-7)$$

上述公式也说明了 R_D 与 R 的关系。分母中有 n, 决定 R_D-R 的值。当 $n=0$ 时, $R_D=R$。当 n 增大时, R_D-R 的值,即真利率和名义利率的差距增大,这正说明了兑现额与贴现时间的关系。前面国库券贴现的例子也说明了这一点。在名义利率确定的情况下,有了 n 就能求 R_D。

[例 12]　求例 10 的真利率。

解法一: 820 元借 2 年的利息为 180 元,则年息率为:

$$R_D=\frac{180}{820\times 2}=10.98\%$$

解法二: 套用公式 (1—7),则:

$$R_D=\frac{0.09}{1-2\times 0.09}=\frac{0.009}{0.82}=10.98\%$$

[例 13]　30 天后到期的支票兑现,银行以单利月息率 9 厘贴息。求: 真利率。

解: $R_D=\frac{R}{1-nR}=\frac{0.009}{1-1\times0.009}=0.00908\approx0.0091$

答: 真利率为月率 9 厘 1 毫。

有时需一笔支出而没有现钱。此时可有远期支票贴现和借款两种方法，那种方法更合算呢? 就要比较贴现的真利率和借款利率的大小。贴现真利率大则借款，反之则贴现。如果借款利率等于贴现的名义利率，毫无疑问是借款合算。一般地说，如果贴现期长，长期借款的利率较低，是借款合算；贴现期短，而短期借款的利率较高，则贴现合算。

第三节　单利年金

迄今，我们是在本金只发生一次的条件下讨论本利和、终值、现值和兑现。现在来讨论多次本金的情况。

年金原指一年支付一次的款项。推而广之，凡属定期发生的本金，无论其为一年一次、半年一次、三个月一次、一个月一次或几年一次，均称为年金。每次发生本金的数额，一般说应是相同，但亦间有不同者。

年金起讫的时期，有确定或不确定两种。有确定起讫时期之年金，称为确定年金；无确定起讫时期之年金，称为生存年金或或有年金。

确定年金又有期末付款与期初付款之分。期末付款者称为普通年金或期末年金；期初付款者称为期初年金或期首年金。此外还有延期年金、永久年金及连续年金等类。

计算年金的方法有年金终值和年金现值，其下又再分期初和期末两种情况。

年金终值即如零存整取，每期零存之数为年金。到期的

整取零存本利和合计即年金终值。年金现值即如分期付款，以后各期分期付款之现值总和即是购买时的现价。

一、单利期初年金终值

若每期发生相同本金（年金）记为 A，每期利率是 R，时间是 n 期，单利计息，则把 n 期年金的本利和总额称为单利年金终值，单利年金终值又分为期初年金和期末年金两种情况。期初年金终值记为 S_n；期末年金终值记为 S'_n。

计算期初年金终值，先计算每次年金的本利和，再将各次年金的本利和加总，即得到年金终值。可列表如下：

期　数	1	2	……	n−1	n
每期初发生年金A，利率R	A	A	……	A	A
n期末本利和					
S=A(1+nR)	A(1+nR)	A[1+(n−1)R]	……	A(1+2R)	A(1+R)

表中，第 n 期初的本金 A 从期初到期末，经过 1 期，到第 n 期末所得本利和 A(1+R)；第 n−1 期初的本金 A 可得 2 期的利息；依次计算，第 1 期初的 A 可得 n 期的利息，本利和 A(1+nR)。表中最后一行之和就是 n 期单利期初年金终值 S_n。可以看出这是一个公差为 AR 的等差数列。求其和：

$$S_n=A(1+R)+A(1+2R)+\cdots\cdots+A[1+(n-1)R]+A(1+nR)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}A(1+iR)=A\sum_{i=1}^{n}(1+iR)=A[n+\frac{n}{2}(n+1)R]$$

$$=nA+\frac{1}{2}(n+1)nAR=nA[1+\frac{1}{2}(n+1)R] \qquad (1-8)$$

上式中，nA 是本金（年金）总额；$\frac{1}{2}(n+1)nAR$ 是利息总额。

［例 14］　中国工商银行一年期的零存整取月息率

7.95‰。工商银行规定在存款的 n 个月内，每月一次，不管是几日存入，存满 n 个月后，在第 n+1 月的 10 日以后才能提取零存整取的本息。此规定即是说零存整取是期初年金。现有甲某，每月零存 50 元，一年后可得本利和（整取）多少？其中利息多少？

解：这是个期初年金终值。A＝50 元，n＝12，R＝7.95‰，代入公式 1－8：

$$S_n = nA + \frac{1}{2}(n+1)n \cdot A \cdot R$$

$$= 12\times 50 + \frac{1}{2}\times 13\times 12\times 50\times 0.00795$$

$$= 600 + 31 = 631\text{元}$$

答：一年后可整取 631 元，其中利息是 31 元。

［例 15］ 中国工商银行五年期月零存整取月息率 10.95‰。工商银行规定利息额可计算到分，但不满元的本金不计息。某君欲 5 年后整取一万元，问 5 年内每月需存多少元？

解：这是已知：n＝60，R＝10.95‰，S_n＝10000，求：A。仍用公式 1—8：

$$S_n = nA\left[1 + \frac{1}{2}(n+1)R\right]$$

$$A = \frac{S_n}{n + \frac{1}{2}(n+1)nR} = \frac{10000}{60 + 30\times 61\times 0.01095}$$

$$= \frac{10000}{80.0385} = 124.94 \approx 125\text{ 元}$$

答：每月存入 125 元，5 年后可整取 10000元。

二、单利期末年金终值

例 14 告诉我们，期初年金的“初”，不是一个日历的时间概念，即不是指具体日历上的“年初”、“月初”，而是指每期年金发生的时间在一个间隔期的期初。从结算的观点来说，即假定 n 期年金之间等间隔。则以第 n 期年金与终值结算的时间关系为准。第 n 期年金发生后，再经过一个等间隔期结算终值的，则视为期初年金终值。反之，如果第 n 期年金发生后即结算终值的，就是期末年金终值，记为 S'_n。期末年金每期本利和见下表：

期　　数	1	2	……	n−1	n
每期初发年金 A,利率 R	A	A	……	A	A
n期末本利和					
S=A(1+nR)	A[1+(n−1)R]	A[1+(n−2)R]	……	A(1+R)	A

计算期末年金终值，因第 n 期年金的发生与结算终值同时，所以第 n 期年金没有利息；第 n－1 期期末年金到第 n 期末只经过一期，只有 1 期的利息，本利和为 A(1＋R)；以此向前推，第 1 期年金只有 n－1 期的利息，本利和为 A[1＋(n－1)R]。表中最后一行各期年金本利和之总和就是单利期末年金终值，也是一个公差 AR 的等差数列。求其和：

$$S'_n=A+A(1+R)+\cdots+A[1+(n-2)R]+A[1+(n-1)R]$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}A(1+iR)=A\sum_{i=0}^{n-1}(1+iR)=A[n+\frac{n}{2}(n-1)R]$$

$$=nA[1+\frac{1}{2}(n-1)R]=nA+\frac{1}{2}(n-1)nAR \qquad (1-9)$$

上式中，nA 是本金(年金)总额；$\frac{1}{2}(n-1)nAR$ 是利息总额。

期初年金终值与期末年金终值相比，年金总额相同。利息总额则期初年金终值利息大于期末年全终值利息。其差

额:

$$S_n - S'_n = nA + \frac{1}{2}(n+1)nAR - nA - \frac{1}{2}(n-1)nAR = nAR$$

即期末年金与期初年金相比，每期年金都少得一期利息 AR，则 n 期年金少得的利息总额为 nAR。

一般地说，如果没有指定年金发生在期初还是期末，计算年金终值就要分别求出期初年金终值和期末年金终值。用 $S_n - S'_n = nAR$ 可使计算简化。

［例 16］ 某企业从 1 月份起，每月提存某项基金 5,000 元，存入专户，存款月息 3 厘，单利计息。求：年底时该项基金的总额。

解：这是单利年金求终值 $A=5000$，$n=12$，$R=0.003$。

分期初年金和期末年金两种情况。

$$S_n = nA + \frac{1}{2}(n+1)nAR$$

$$= 12\times5000 + 13\times6\times5000\times0.003$$

$$= 61170 \text{ 元}$$

$$S'_n = S_n - nAR = 61170 - 5000\times12\times0.003 = 60990 \text{ 元}$$

答：每月初提存时，年底的基金总额是 61170 元；每月底提存时，年底的基金总额是 60990 元。

［例 17］ 租某型飞机一架有四种交付租金的方案。月息 6 厘，单利计息。试比较各方案：

甲方案：年初交付全年租金 55万元

乙方案：每季初交付全季租金 14 万元

丙方案：每季末交付全季租金 14.5 万元

丁方案：年末交付全年租金 60 万元

解：将各方案租金都算到年末终值作比较。其中乙、丙方案是年金终值，$n=4$，季息率$=1.8\%$。

$$S_{甲} = 55\times(1+12\times0.006) = 55\times1.072 = 58.96 \text{万元}$$

$$S_{乙}=4\times 14+\frac{1}{2}\times 4\times(4+1)\times 14\times 0.018=58.52万元$$

$$S_{丙}=4\times 14.5+\frac{1}{2}\times 4\times(4-1)\times 14.5\times 0.018=59.566$$
万元

$S_{丁}=60$万元

$\therefore\quad S_{丁}>S_{丙}>S_{甲}>S_{乙}$

乙方案为最佳方案。

[例 18] 某君每月将 120 元存入银行，存满 3,600 元后即提款购买壹架彩电，月息 7 厘 5，单利计息，问要几个月才能存满 3,600元?

解: 设 n 期能存满 3600 元，则第 n 个月的本金可以不要利息，所以这是一个期末年金问题。已知 $S'_n=3600$，$R=0.0075$，$A=120$ 求: n。

$$S'_n=nA[1+\frac{1}{2}(n-1)R]$$

$$3600=120n[1+\frac{1}{2}(n-1)\times 0.0075]$$

整理得: $3n^2+797n-24000=0$

$$n=\frac{-797+\sqrt{797^2+12\times 24000}}{2\times 3}=27.3\approx 28$$

(n 的负根不合题意舍去)

答: 28 个月能存满 3600 元。

三、单利期初年金现值

有 n 期年金，每期年金的现值之和，称为年金现值。期初年金现值记为 Q_n。由于是期初年金，第 1 期年金发生之时，就是结算现值之时，故 $Q=A$; 第 2 期年金发生之时，与结

算现值之时间隔 1 期，故$Q=\frac{A}{1+R}$；余类推，第 n 期年金的现值 $Q=\frac{A}{1+(n-1)R}$。如下表:

期　　数	1	2	……	n−1	n
每期初发生年金A,利率R	A	A	……	A	A
现值　$Q=\frac{A}{1+nR}$	A	$\frac{A}{1+R}$	……	$\frac{A}{1+(n-2)R}$	$\frac{A}{1+(n-1)R}$

表中最后一行各期年金现值之总和，即为单利期初年金现值。它是一个调和数列(每项的倒数成等差数列)。

$$Q_n=A+\frac{A}{1+R}+\cdots\cdots+\frac{A}{1+(n-2)R}+\frac{A}{1+(n-1)R}$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A}{1+iR} \qquad (1-10)$$

公式 1—10，无法象 S_n 一样直接求和，只能逐项展开。当 n 值不大时，展开项不多，计算方便。反之，则计算很繁琐。此时可考虑采用近似计算:

$$1.\ \frac{A}{1+iR}=\frac{A(1-iR)}{(1+iR)(1-iR)}=\frac{A(1-iR)}{1-(iR)^2}$$

当 R 很小时，$R^2\to0$, $(iR)^2\to0$, 则 $1-(iR)^2\to1$

$$\therefore\quad \frac{A}{1+iR}\approx A(1-iR)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A}{1+iR}\approx\sum_{i=0}^{n-1}A(1-iR)$$

$$=nA-\frac{1}{2}(n-1)nAR$$

2. 根据现值与终值的关系:

$$S=Q(1+nR),\text{ 则: }Q=\frac{S_n}{1+nR}$$

3. 用定积分原理近似计算: (证明略)

$$Q_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A}{1+iR}\approx\int_{-0.5}^{n-0.5}\frac{A}{1+iR}di$$

$$=\frac{A}{R}ln\frac{1+(n-0.5)R}{1-0.5R}$$

四、单利期末年金现值

如果是期末发生的年金,则第 1 期年金与结算之时 (现时) 相隔一期, 其现值是 $\frac{A}{1+R}$, 余类推, 第 n 期年金的现值是 $\frac{A}{1+nR}$。见下表:

期　数	1	2	……	n−1	n
每期末发生年金A,利率 R	A	A	……	A	A
现值 $Q=\frac{A}{1+nR}$	$\frac{A}{1+R}$	$\frac{A}{1+2R}$	……	$\frac{A}{1+(n-1)R}$	$\frac{A}{1+nR}$

表中最后一行各期年金现值之和,即为单利期末年金现值,记为 Q'_n 。则:

$$Q'_n=\frac{A}{1+R}+\frac{A}{1+2R}+\cdots\cdots+\frac{A}{1+(n-1)R}+\frac{A}{1+nR}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{1+iR}\qquad(1—11)$$

这也是一个调和数列。Q_n 的近似计算仍适用:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{1+iR}\approx\sum_{i=1}^{n}A\,(1-iR)=nA-\frac{1}{2}(n+1)nAR$$

(当 R 很小时)

$$Q'_n=\frac{S'_n}{1+nR}$$

$$Q'_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{1+iR}\approx\int_{0.5}^{n+0.5}\frac{A}{1+iR}di=\frac{A}{R}ln\frac{1+(n+0.5)R}{1+0.5R}$$

根据资金时间价值原理，将今后各个时期可能发生的资金，全部换算成"现在"某个时刻的现值来衡量经济效益的方法，称现值法。与现值法相对，折算成将来某个时刻的终值的方法，称终值法。

[例 19] 用现值法解例 17。

解：$Q_{甲}=55$ 万元

$$Q_{丁}=\frac{60}{1+12\times0.006}=55.97\text{ 万元}$$

$Q_{乙}$有四种算法：($A=14, R=0.018, n=4$)

$$1.\ Q_n=\sum_{i=0}^{4-1}\frac{14}{1+i\times0.018}=14+\frac{14}{1.018}+\frac{14}{1.036}+\frac{14}{1.054}$$

$$=54.548\text{ 万元}$$

$$2.\ Q_n\approx\sum_{i=0}^{4-1}14(1-0.018i)=14(4-0.018\sum_{i=0}^{3}i)$$

$$=56-14\times0.018\times6=54.488\text{ 万元}$$

$$3.\ Q_n\approx\frac{S_n}{1+n\cdot R}=\frac{58.52}{1+4\times0.018}=54.590\text{ 万元}$$

$$4.\ Q_n \approx \frac{14}{0.018}\ln\frac{1+3.5\times0.018}{1-0.5\times0.018}=\frac{14}{0.018}\ln\frac{1.063}{0.991}$$

$=54.550$ 万元

$Q_{丙}$也有四种算法: ($A=14.5$, $R=0.018$, $n=4$)

$$1.\ Q'_n=\sum_{i=1}^{4}\frac{14.5}{1+0.0018i}$$

$$=14.5\left(\frac{1}{1.018}+\frac{1}{1.036}+\frac{1}{1.054}+\frac{1}{1.072}\right)$$

$=55.523$ 万元

$$2.\ Q'_n\approx\sum_{i=1}^{4}14.5\,(1-0.018i)=14.5\,(4-0.018\sum_{i=1}^{4}i)$$

$=14.5\,(4-0.18)=55.39$ 万元

$$3.\ Q'_n=\frac{S'_n}{1+nR}=\frac{59.566}{1+4\times0.18}=55.565\text{ 万元}$$

$$4.\ Q'_n=\frac{14.5}{0.018}\ln\frac{1+4.5\times0.018}{1+0.5\times0.018}=55.524\text{ 万元}$$

$Q_{乙}<Q_{甲}<Q_{丙}<Q_{丁}$

∴ 乙方案为最佳方案。

从上例的单利年金现值的近似计算中，可以看出，用积分近似计算最精确，而 $\Sigma A(1-iR)$ 总是小于准确值 $\Sigma\frac{A}{1+iR}$。这是因为 $1-(iR)^2$ 恒小于 1。令其近似于 1，

则：$\frac{A(1-iR)}{1-(iR)^2}$ 恒大于 $A(1-iR)$。用 $\frac{S_n}{1+nR}$ 求得 Q_n，与 $\Sigma\frac{A}{1+iR}$ 也有误差，而且恒大于准确值。这是由于单利计息的原因。例如，第 2 期初年金 A，直接算现值是$\frac{A}{1+R}$。如果将 A 先求到第 2 期末终值 $A(1+R)$，再求现值 $\frac{A(1+R)}{1+2R}$，则：

$$\because A(1+R)^2>A(1+2R),$$

$$又\ \because R>0,\ 1+2R>0,\ 1+R>0$$

$$\therefore \frac{A(1+R)}{1+2R}>\frac{A}{1+R}$$

还可以证明，第 i 期的年金先求到 n 期的终值再算现值，必定比第 i 期年金直接求现值大。

从资金时间价值概念判断，也可知期初年金现值必定大于期末年金现值：

$$Q_n-Q'_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A}{1+iR}-\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{1+iR}=A-\frac{A}{1+nR}=\frac{nAR}{1+nR}$$

习 题 一

一、求利息:

1．已知: P＝320 元， n＝1 年， R＝3‰(月息率)

2．已知: P＝1600 元，n＝0.5 年， R＝7.2％(年息率)

3．已知: P＝1850 元，n＝4 年， R＝6 厘 (年息率)

4．已知: P＝240 元， n＝1.5 年， 月息率 4 厘

二、填下表中的空格:

本金	时间	利率	利息
	120 天	6‰ 日	48 元
1800 元	75 天	日	18 元
5200 元	月	6.5‰ 月	169 元
	0.25 年	4.5％ 年	22.5元
800 元	月	4‰ 月	8 元

三、求本利和。已知条件同习题一。

四、已知: S＝1980 元，n＝10 月，R＝10‰。求: 本金 P 和利息 I。

五、某企业"银行借款"帐户记载如下表所示。以月息 4 厘 2 计算 6 月份借款利息。

日 期	增加(元)	减少(元)	余额(元)
6.1			37,500
6.4	12,000		
6.13		15,500	
6.21	16,700		
6.30		15,700	
月结			

六、活期储蓄月息 2 厘 4，每月初存入 20 元，求一年后的本利和。

七、已知 $S'_n=10540$ 元，$S_n=10660$ 元，$A=1000$ 元，$n=10$ 月。求:月息率 R。

八、某个体户，从今年二月末起，每月在利润中提取 160 元存入银行。已知银行单利月息 4 厘 2，试求在年底可以取回存款的总额。

九、已知: $A=8000$ 元，$n=7$ 月，$R=5‰$ 月。求: Q_n 和 Q'_n。

十、已知: $Q_n=11864$ 元，$n=6$ 月，$R=4.2‰$ 月。求 A。

十一、已知: $Q_n=39.2$，$A=20$，$n=2$ 年。求年息率。

十二、面值 1000 元的支票，40 天后到期，银行以单利月息率 9 厘贴息兑现。求: 贴息额、兑现额和真利率。

十三、购买某型飞机，如一次付清，价格 1000 万，也可分五年分期付款，如每年初付，每次付款 230 万；如每年底付，则每次付 250 万。问那种购机付款方式最合适。(年息率 1 分，单利计息)

十四、中国工商银行三年期的月零存整取月息率 9 厘 4 毫 5 丝。设存户到期欲取 3000 元，问每月至少需存多少元?(计算到元，元以下不计息)

十五、掌握下列概念:

本金、利息、利息率、本利和、计息周期数、现值、终值、贴现息、兑现额、年金、期初年金、期末年金、年金现值、年金终值。

十六、中国人民银行决定从 1990 年 4 月 15 日起适当调整降低部分存款利率。三月个存款年率为6.30%，半年期存款年率为7.74%，一年期存款年率为10.08%，二年期存款年率为 10.98%，三年期存款年率为 11.88%，五年期存款年率为 13.68%，八年期存款年率为 16.20%。分别求各挡定期存款的月息率。现有本金一百元，分别存满各挡定期，求其利息和本利和。

第二章 复 利

时间较长的借贷活动中，本金产生的利息经过一定期后，如果不能并入本金作为下期生息的母金，显然损害了债权人的利益。债权人必然要定期取走利息，或者取出本息再合并转入下一期的贷放。造成借贷行为的短期化，不利于经济长远发展。

所以，单利计算虽然简便，但只适用于短期借贷。中国工商银行的储蓄，为使单利适用于长期储蓄，设置了多挡次的利息率，以补充其不足之处。另外，单利的贴现也不合理，单利年金现值和终值的换算则误差较大。因此，间隔期较长的资金时间价值的计算，无有不按复利计算。一般情况下，所谓利息，均指复利。而单利则需说明。

按约定在一定时间结算利息一次，结息后即将利息并入本金，为此后再生利息之用，这种计息方法叫做复利。即所谓“利上加利”或“利滚利”。

复利问题中各种概念所用的代号，与单利问题中所用的基本相同。有时略有不同，届时会另加说明。复利名义利率的年月日的换算法和年月日的时间换算与单利相同。

第一节 复利的计算

一. 复利本利和和利息

设 R 是一个结息周期内的利息率，该结息周期可长到一年或几年，可短到一日或更短。一般指一年，则 R 就是年息率；n 为结息周期数，一般指年数。

在复利的情况下，第一期末的本利和 $P(1+R)$ 即为第二期初的本金。则：

第二期末之本金为 $P(1+R)$，第二期末之利息为 $P(1+R)\cdot R\times 1$，第二期末之本利和为：

$$S=P(1+R)+P(1+R)R=P(1+R)(1+R)=P(1+R)^2,$$

即是第三期初之本金，依此类推。

结算到 n 期末，则 n 期末的复利本利和公式为：

$$S=P(1+R)^n \tag{1-12}$$

在整个 n 期的全部利息是 n 期末的本利和减去第一期初的本金：

$$I=S-P=P(1+R)^n-R$$
$$=R[(1+R)^n-1] \tag{1-13}$$

式中：$[(1+R)^n-1]$ 称为复利的计息因子。

［例 20］　本金 1000 元，时期 4 年，年息率 1 分 2 厘，每年复利一次。求：4 年后的本利和和利息。

解：$P=1000$ 元，$n=4$，$R=12\%=0.12$

$S=P(1+R)^4=1000\times(1+0.12)^4=1573.52$ 元

$I=S-P=573.52$ 元

或：$I=P[(1+0.12)^4-1]=1000\times 0.57352=573.52$ 元

二、复利的实际利率和名义利率

在复利计算中所给的 R 一般都是年息率。如果一年复利一次，一年实得的利息的年息率与给定 R 相同。但利息如果是半年、三个月、一个月甚至一天复利一次，则一年实得的利息就大不相同。

［例 21］　本金 1000 元，年息率 1 分 2 厘，求：年结息一次，每半年结息一次，每季结息一次，每月结息一次的年本利和和利息。

解：

1. 年结息一次，年息 12 %，$n=1$

$$S=1000\times(1+0.12)^1=1120 \text{ 元}$$

$$I = 1000\times[(1+0.12)^1-1] = 120\text{ 元}$$

2. 半年结息一次，$R = \dfrac{0.12}{2} = 0.06, n=2$

$$S = 1000\times(1+0.06)^2 = 1123.6\text{ 元}$$
$$I = 1000\times[(1+0.06)^2-1] = 123.6\text{ 元}$$

3. 每季度结息一次，$R = \dfrac{0.12}{4} = 0.03, n=4$

$$S = 1000\times(1+0.03)^4 = 1125.5\text{ 元}$$
$$I = 1000[(1+0.03)^4-1] = 125.5\text{ 元}$$

4. 每月结息一次，$R = \dfrac{0.12}{12} = 0.01,\ n = 12$

$$S = 1000\times(1+0.01)^{12} = 1126.8\text{ 元}$$
$$I = 1000[(1+0.01)^{12}-1] = 126.8\text{ 元}$$

从例 21 中可见，一年内结息的时间越短，复利的次数越多，则一年内得到的利息越多。年息率 12% 是名义利率。实际年息率是多少，要看年内结息次数。半年结息一次，实际年息率 12.36%；每季结息一次，实际年息率 12.55%；每月结息一次，实际年息率 12.68%。

以 R_E 代表实际利息率 (Effective Rate)，R_N 代表名义利息率 (Nominal Rate)，m 为名义利率期内的结息次数。则实际利率与名义利率的关系：

$$R_E = (1+\frac{R_N}{m})^m - 1 \qquad (1\text{-}14)$$

$$R_N = m(\sqrt[m]{1+R_E} - 1)$$

［例 22］ 名义年利率为 12%，每季度复利一次。求：实

际年利率。

解:$R_N = 0.12$, $m = 4$

$$R_E = (1+\frac{0.12}{4})^4-1 = (1.03)^4-1 = 0.1255$$

答: 实际年利率为 12.55%。

[例 23] 实际年利率为 12.68%,每月结息一次。求: 名义年利率。

解:$R_E = 0.1268$, $m = 12$

$$R_N = 12\times(\sqrt[12]{1+0.1268}-1) = 12\times0.01 = 0.12$$

答: 名义年利率为 12%。

一般地说,习惯上名义利率是指年名义利息;复利 m 次是指一年内复利 m。如没有特别说明,即作以上理解,又习惯上,对实际利率不标明下标,如果没有特别说明,$R = R_E$。

三. 复利基本公式的展开

$$\begin{cases} S = P(1+R)^n \\ I = S-P = P[(1+R)^n-1] \end{cases}$$

称为复利基本公式,组成一个方程组。S、P、I、R、n 五个元素中,已知三个即可解此方程组,求得另二个未知元素。根据各种实际问题的需要,其计算公式如下:

1. 已知: R, n, I
   求: S, P

得: $\begin{cases} P = \dfrac{I}{(1+R)^n-1} \\ S = P+I \end{cases}$

2. 已知: P, I, n
   求: S, R

得: $\begin{cases} S = P+I \\ R = \sqrt[n]{\dfrac{S}{P}}-1 \end{cases}$

3. 已知：P，I，R　　得：$\begin{cases} S = P+I \\ n = \dfrac{\lg S-\lg P}{\lg(1+R)} \end{cases}$
　求：　S，n

4. 已知：S，R，n　　得：$\begin{cases} P = \dfrac{S}{(1+R)^n} \\ I = S-P \end{cases}$
　求：　P，I

5. 已知：S，I，n　　得：$\begin{cases} P = S-I \\ R = \sqrt[n]{\dfrac{S}{P}}-1 \end{cases}$
　求：　P，R

6. 已知：S, I, R　　得：$\begin{cases} P = S-I \\ n = \dfrac{\lg S-\lg P}{\lg(1+R)} \end{cases}$
　求：　P, n

7. 已知：S, P, n　　得：$\begin{cases} I = S-P \\ R = \sqrt[n]{\dfrac{S}{P}}-1 \end{cases}$
　求：　I, R

8. 已知：S, P, R　　得：$\begin{cases} I = S-P \\ n = \dfrac{\lg S-\lg P}{\lg(1+R)} \end{cases}$
　求：　I, n

［例 24］本金 1000 元，利率 12% 年，一年复利一次。求：欲使本金翻一番，求存款年数。

解: $n = \dfrac{\lg 2000 - \lg 1000}{\lg(1+R)} = \dfrac{\lg 2}{\lg 1.12}$

$= \dfrac{0.301}{0.0492} = 6.12$ 年

不知本金数，只要知道 $\dfrac{S}{P}$ 的关系，和已知 R，就能求 n。

有时，整个存款的时期不正好是结息期的倍数，即 n 不是整数时，则 n 可用分数或小数代入公式 1-12。

［例 25］中国工商银行的定期储蓄月息率见例 1，每次期满后，取本息转入下一期，则单利即成复利计息。设 100 元欲存 20 年，试比较结息期分别为 1 年，2 年，3 年，5 年，8 年的本利和。

解: 20 年内结息的期数即复利次数，每次复利的 R 和本利和如下:

本金	结息期	期数	利率	本利和的计算
100 元	1 年	20	0.1134	$100(1+0.1134)^{20} = 857.09$ 元
100 元	2 年	10	0.2448	$100(1+0.2448)^{10} = 893.30$ 元
100 元	3 年	$6\frac{2}{3}$	0.3942	$100(1+0.3942)^{6\,2/3} = 916.57$ 元
100 元	5 年	4	0.747	$100(1+0.747)^{4} = 931.48$ 元
100 元	8 年	2.5	1.4112	$100(1+0.4112)^{2.5} = 902.78$ 元

有时，整个存款时期内，R 有调整。R_1 的存期为 n_1，R_2 的存期为 n_2，R_i 的存期为 n_i，则公式 1－12 可扩展为:

$$S = P(1+R_1)^{n_1}(1+R_2)^{n_2}\cdots(1+R_k)^{n_k}$$
$$= \prod_{i=1}^{k} P(1+R_i)^{n_i}$$

［例 26］设借款 5 万，前 3 年年息率 6 厘，第四年起年

息率 8 厘，第六年起年息率 1 分。求：到第 8 年末的借款总额。

、解：$P = 5000$ 元，$R_1 = 0.06$，$n_1 = 3$，

$R_2 = 0.08$，$n_2 = 2$，$R_3 = 0.1$，$n_3 = 3$

$S = 50000(1+0.06)^3 \cdot (1+0.08)^2 \cdot (1+0.1)^3$

$= 92451.33$ 元

四. 复利现值和贴现

本金是本利和的现值。本利和是本金的终值。复利现值的计算法，与已知本利和求本金的算法相同：

$$Q = \frac{S}{(1+R)^n} = S(1+R)^{-n}$$

［例 27］ 某城市推行"还本销售商品房"，按现行价格出售商品房，房主一次付清房款，产权归买主所有，18 年后买主凭证领回买房时的全部房款，产权归买主不变。现行年息率 11.34%。年复利一次。

求：10 万元房款 18 年后等于现值多少？

解：$Q = S(1+R)^{-18} = 100000(1+0.1134)^{-18} = 14463.66$ 元

贷款人预先在借出的本金中扣去其应计的利息者称贴现。贴现按期复利者称复利贴现，即预先扣除的贴现息按复利计算。本金减去贴现息后为兑现额。兑现额经复利，到借期满要等于本金。

仍采用单利贴现用过的符号，上述关系即：

$$(P-D)(1+R)^n = P$$

$$Q_D = P-D = P(1+R)^{-n}$$

$$D = P[1-(1+R)^{-n}] \tag{1-15}$$

公式 $Q_D = P(1+R)^{-n}$，表明兑现额是贴现本金的现值，这是复利贴现与单利贴现的根本区别。其合理性是显然的。用公式 1-15，可直接求得贴现息。

［例 28］ 中国民航对外国航空公司的应收款票据结算时间一般要 3 个月，若日息率万之三。试计算由于结算期长所损失的比率。

解：结算款不因结算期长达 90 天而升值。设结算款 P,90 天后结算到手的仍然是 P，则中国民航损失了 90 天的贴现息 D。损失的比率是：

$$\frac{D}{P}=\frac{P[1-(1+R)^{n}]}{P}=1-(1+0.0003)^{-90}=0.0266=2.66\%$$

上例表明，由于结算期长，每结算 1 元，要损失 0.0266 元。

五. 复利贴现的真利率

复利贴现的真利率，简称贴现率。虽然复利贴现合理，但兑现时从本金中预先扣除贴现息所用的贴现率，与还本付息时计息所用的存款利率显然是不相等的。存款利率有名义利率 (R_N) 与实际利率 (R_E) 之分，把整个贴现期作为一期，即 n=1，则贴现真利率 R_D 与实际利率 R_E 的关系：

$$(P-P\cdot R_D)(1+R_E)=P$$

$$1-R_D=\frac{1}{1+R_E}$$

$$R_D=1-\frac{1}{1+R_E}=\frac{R_E}{1+R_E}$$

$$R_E=\frac{R_D}{1-R_D} \qquad (1-16)$$

名义利率要用公式 1-14 换算成实际利率，再求贴现率。

［例 29］ 1. 已知：实际利率年息 6 厘，求：年贴现率。

2. 已知：年贴现率为 6 厘，求：年实际利率。

解: 1. $R_D = \frac{R_E}{1+R_E} = \frac{0.06}{1.06} = 0.0566$

$$2.\ R_E = \frac{R_D}{1-R_D} = \frac{0.06}{0.94} = 0.06383$$

贴现息亦有一年复利数次的。设 R'_D 为年名义贴现率，m 为一年中复利次数，R_D 为一年之总贴现息率即实贴现率。

则: $P\left(1-\frac{R'_D}{m}\right)^m = P(1-R_D)$

$$\left(1-\frac{R'_D}{m}\right)^m = 1-R_D$$

$$R_D = 1-\left(1-\frac{R'_D}{m}\right)^m \qquad (1-17)$$

$P\left(1-\frac{R'_D}{m}\right)^m$ 即本金 P 依名义贴现率 R'_D，一年中复利 m 次，在一年前的兑现额。贴现息为

$$P-P\left(1-\frac{R'_D}{m}\right)^m = P\left[1-\left(1-\frac{R'_D}{m}\right)^m\right]。$$

[例 30] 本金 1000 元，一年后到期，年名义贴现率 1 分，每年复利二次。求: 贴现息 D。

解: $D = P\left[1-\left(\frac{R'_D}{m}\right)^m\right] = 1000\left[1-\left(1-\frac{0.1}{2}\right)^2\right]$

$$= 1000\left[1-(0.95)^2\right] = 97.5 \text{ 元}$$

从公式 1－14　　$R_N = m\left(\sqrt[m]{1+R_E}-1\right)$

公式 1－16　　$1-R_D=\dfrac{1}{1+R_E}$

公式 1－17　　$\left(1-\dfrac{R'_D}{m}\right)^m=1-R_D$

得到: $\dfrac{1}{1+R_E}=\left(1-\dfrac{R'_D}{m}\right)^m$

$$1+R_E=\left(\frac{1}{1-\frac{R'_D}{m}}\right)^m$$

代入公式 1－14，得到:

$$R_N=m\left(\frac{1}{1-\frac{R'_D}{m}}-1\right)=\frac{mR'_D}{m-R'_D} \qquad (1-18)$$

公式 1-18 说明了名义贴现率 R'_D 与名义利率 R_N 之间的换算。

已知名义利率 R_N，则名义贴现率 $R'_D=\dfrac{R_N}{1+\frac{R_N}{m}}=\dfrac{mR_N}{m+R_N}$

[例 31]　已知名义利率为年息 1 分，每年复利二次，求: 名义年贴息率。

解: $R'_D=\dfrac{mR}{m+R}=\dfrac{2\times0.1}{2+0.1}=0.09524$

第二节　复利年金终值

与单利年金一样，当每期发生年金是 A，每期的利率是 R，用复利计息 n 期年金的本利和总额称复利年金终值。由于年金发生的时间不同，又分为复利期初年金终值 (记为 S_n) 和复利期末年金终值 (记为 S'_n)。

一、复利期初年金终值

在期初发生年金的情况下，则第 n 期初的年金到第 n 期末的终值为 A (1+R)，从最后一期往前推，每期的本利和如表：

期　　数	1	2	……	n−1	n
每期初发生年金 A，利率 R	A	A	……	A	A
n 期末终值，$S=A(1+R)^n$	$A(1+R)^n$	$A(1+R)^{n-1}$	……	$A(1+R)^2$	$A(1+R)$

表中最后一行之和就是复利期初年金终值。这是个等比数列，公比 $q=(1+R)$，首项 $a_1=A(1+R)$，套用等比数列前 n 项求和公式 $S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$，则复利期初年金终值 S_n 为：

$$S_n=A(1+R)+A(1+R)^2+\cdots\cdots+A(1+R)^{n-1}+A(1+R)^n=\sum_{i=1}^{n}A(1+R)^i$$

$$=\frac{A(1+R)[(1+R)^n-1]}{(1+R)-1}=A\left(\frac{1+R}{R}\right)[(1+R)^n-1] \quad (1\text{-}19)$$

［例 32］　某君每年初存储 100 元，以作其子之大学费用，年息 1 分，求：十年后本利和。

解：这是一个期初年金终值问题。

$$A=100,\ R=0.1,\ n=10$$

$$S_n=\frac{100(1+0.1)[(1+0.1)^{10}-1]}{0.1}=1753.12\text{ 元}$$

公式 1-19. 发生年金的间隔期和复利期相同，假定都是一年 ($R_E=R_N$) 条件下，才可适用。但这两个期限往往是不相等的，此时公式 1-19 有下列各种变化：

1. 每年复利 m 次，年金发生一次。

公式 1-19 适用条件的实质是名义利率等于实际利率。每年复利 m 次，则以名义利率代入公式 1—19 得到：

$$R_E=(1+\frac{R_N}{m})^m-1$$

$$1+R_E=(1+\frac{R_N}{m})^m$$

$$S_n(m,1)=\frac{A(1+\frac{R_N}{m})^m[(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1]}{(1+\frac{R_N}{m})^m-1} \quad (1\text{-}20)$$

［例 33］ 年期初年金 100 元，年息 1 分，每季复利一次，求：十年后本利和。

解：

$$S_n(4,1)=\frac{100(1+\frac{0.1}{4})^4[(1+\frac{0.1}{4})^{4\times10}-1]}{(1+\frac{0.1}{4})^4-1}=\frac{100(1.025)^4[(1.025)^{40}-1]}{(1.025)^4-1}$$

$$=100\times17.9168=1791.68\text{ 元}$$

例 33 的答案显然大于例 32 的答案。

2. 每年复利一次，每年付款 l 次，每年年金总数 A。

假定 l 次付款数都相等，则每次付款 $\frac{A}{l}$，n 年内共付款 $n\cdot l$ 次。又假定每次付款间隔其相等。一般付款时不能复利计息，要付款次数除以 l 得整数时（即整年时）才能复利一次。则第一次付款到 n 期末之终值为 $\frac{A}{l}(1+R)^n$，第二次付款之终值为 $\frac{A}{l}(1+R)^{\frac{nl-1}{l}}$ 类推，第 $nl-1$ 次终值为

$\frac{A}{l}(1+R)^{\frac{2}{l}}$，第 n$l$ 次终值为$\frac{A}{l}(1+R)^{\frac{1}{l}}$。这是一个 n$l$ 项的等比数列，首项 $\frac{A}{l}(1+R)^{\frac{1}{l}}$，公比 $(1+R)^{\frac{1}{l}}$。以 $Sn(1,l)$ 代表 n 年，每年复利一次，每年付款 l 次，每年年金总数 A 的期初年金终值。则：

$$S_n(1,l)=\frac{A}{l}(1+R)^{\frac{1}{l}}+\frac{A}{l}(1+R)^{\frac{2}{l}}\cdots\cdots+\frac{A}{l}(1+R)^{n-\frac{1}{l}}+\frac{A}{l}(1+R)^n$$

$$=\frac{A(1+R)^{\frac{1}{l}}[(1+R)^{\frac{1}{l}\times n\ l}-1]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]}$$

$$=\frac{A}{l}\cdot\frac{(1+R)^{\frac{1}{l}}[(1+R)^n-1]}{(1+R)^{\frac{1}{l}}-1} \tag{1-21}$$

［例 34］ 年期初年金 100 元，分四次每季初存一次，年息 1 分，每年复利一次，求：十年后的本利和。

解：

$$S_n(1,4)=\frac{100}{4}\frac{(1+0.1)^{\frac{1}{4}}[(1+0.1)^{10}-1]}{[(1+0.1)^{\frac{1}{4}}-1]}$$

$$=\frac{25(1.1)^{\frac{1}{4}}[(1.1)^{10}-1]}{(1.1)^{\frac{1}{4}}-1}$$

$=25\times 67.6866=1692.16$（元）

例 34 的答案小于例 32 的答案也是合乎逻辑的。

3. 每年复利 m 次，每年付款 l 次，每年年金总数 A。

在每年复利 m 次的条件下，给定的年息率一般为名义利息率 R_N。则将 $(1+R)=(1+\frac{R_N}{m})^m$ 代入公式 1-21。得：

$$S_n(m,l)=\frac{A(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}[(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1]}{l[(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}-1]} \tag{1-22}$$

［例 35］年期初年金 100 元，年息 1 分。每年复利 4 次，每年平均分两次存款，求十年後的本利和。

解:

$$S_n(4,2)=\frac{100(1+0.025)^2[(1+0.025)^{40}-1]}{2[(1+0.025)^2-1]}$$

$$=1748.51(元)$$

4. 每年复利 m 次，每年付款 m 次，每年年金总数 A。

在给定的年名义利息率为 R_N，$m=l$ 的条件下，公式 1－22 演化成:

$$S_n(m=l)=\frac{A(1+\frac{R_N}{m})[(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1]}{l[(1+\frac{R_N}{m})-1]}$$

$$=\frac{A(1+\frac{R_N}{m})[(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1]}{R_N} \tag{1-23}$$

［例 36］ 年期初年金 100 元，分四次存，年息 1 分，每年复利 4 次。求：十年后本利和。

解:

$$S_n(4,4)=\frac{100(1+0.025)[(1+0.025)^{40}-1]}{0.1}=1727.19(元)$$

例 36 也可用公式 1-19 解。套用公式 1-19 时，该题理解为 $A=25$，$n=40$，$R=0.025$。求期初年金终值 S_n。所以公式 1－19 是复利期初年金的基本公式。

以上各式应用于每年付款一次或数次。如数年付款一次，则基本公式的演变可如下示。

5. k 年付款一次，每年复利一次，年息率 R，每次付款 A。

在上述情况下，第一次付款经过 n 年，第二次经过 n－k 年，共 $\frac{n}{k}$ 次，第 $\frac{n}{k}$ －1 次付款经过 2k 年，第 $\frac{n}{k}$ 次付款经过 k 年。终值为：

$$S_{\frac{n}{k}}(1,k)=A(1+R)^k+A(1+R)^{2k}+\cdots\cdots+A(1+R)^{n-k}+A(1+R)^n$$

$$=\frac{A(1+R)^k[(1+R)^{k\cdot\frac{n}{k}}-1]}{(1+R)^k-1}=\frac{A(1+R)^k[(1+R)^n-1]}{(1+R)^k-1}$$

(1－24)

［例 37］ 每 2 年初存 200 元，年息 1 分，年复利一次。求：10 后本利和。

解：$S_{\frac{n}{k}}(1,2)=\frac{200(1+0.1)^2[(1+0.1)^{10}-]}{(1+0.1)^2-1}=1836.60$ 元

6. k 年付款一次，每年复利 m 次，年息率 R，每次付款 A。

一年复利 m 次，公式 1-24 中的 1＋R 应改为 $(1+\frac{R_N}{m})^m$，其式演化为：

$$S_{\frac{n}{k}}(m,k)=\frac{A(1+\frac{R_N}{m})^{mk}[(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot n}-1]}{(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot k}-1} \quad (1-25)$$

［例 38］ 每 2 年初存 200 元，年息 1 分，每年复利 2 次。求：10 年后本利和。

解：$S_{\frac{n}{k}}(2,2)=\dfrac{200(1+0.05)^4[(1+0.05)^{20}-1]}{(1+0.05)^4-1}=1865.00$（元）

二. 复利期末年金终值

以上讨论的年金，无论是一年一次，一年数次，还是数年一次，都是在期初发生的。年金在期末发生的情况下，则第 n 期末年金到 n 期末的终值为 A；以此类推，第一期末年金到 n 期末经过 n－1 期的复利，终值 $A(1+R)^{n-1}$。见下表：

期　数	1	2	……	n－1	n
每期初发生年金 A，利率 R	A	A	……	A	A
n 期末终值，$S=A(1+R)^n$	$A(1+R)^{n-1}$	$A(1+R)^{n-2}$	……	$A(1+R)$	A

各期年金本利和仍是一个等比数列，公比 (1＋R)，首项 A。终值为：

$$S'_n=A+A(1+R)+\cdots\cdots+A(1+R)^{n-2}+A(1+R)^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}A(1+R)^i$$

$$=\frac{A[(1+R)^n-1]}{(1+R)-1}=\frac{A}{R}[(1+R)^n-1] \qquad (1-26)$$

期初年金终值必大于期末年金终值。又因为是复利，可用除法比较两者关系：

$$\frac{S_n}{S'_n}=\frac{A(1+R)[(1+R)^n-1]}{R}\div\frac{A[(1+R)^n-1]}{R}$$

$$=1+R \qquad (1-27)$$

又：$S'_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1-1}A(1+R)^i=\sum_{i=0}^{n}A(1+R)^i$

$$=\sum_{i=1}^{n}A(1+R)^i+A(1+R)^0=S_n+A$$

运用公式 1-27 的原理，前面介绍的各种复利次数和付款次数的期末年金终值，都可以用相应的期初年金终值公式除以相应的各项而得：

1. 每年复利 m 次，年金期末发生一次，除以 $(1+\frac{R_N}{m})^m$，得：

$$S_n(m,1)=\frac{A[(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1]}{(1+\frac{R_N}{m})^m-1} \qquad (1-28)$$

2. 每年复利一次，每年付款 l 次，每年年金总数 A，除以 $(1+R)^{\frac{1}{l}}$，得：

$$S'_n(1,l)=\frac{A[(1+R)^n-1]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]} \qquad (1-29)$$

3. 每年复利 m 次，每年付款 l 次，每年年金总数 A，除以 $(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}$，得：

$$S'_n(m,l)=\frac{A[(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1}{l[(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}-1]} \qquad (1-30)$$

4. 每年复利 m 次，每年付款 m 次，每年年金总数 A，除以 $(1+\frac{R_N}{m})$，得：

$$S'_n(m=l)\frac{A[(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1]}{R_N} \tag{1-31}$$

5. k 年付款一次，每次年金 A，每年复利一次，除以 $(1+R)^k$，得：

$$S'_{\frac{n}{k}}(1,k)=\frac{A[(1+R)^n-1]}{(1+R)^k-1} \tag{1-32}$$

6. k 年付款一次，每次年金 A，每年复利 m 次，除以 $(1+\frac{R_N}{m})^{mk}$，得：

$$S'_{\frac{n}{k}}(m.k)=\frac{A[(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot n}-1]}{(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot k}-1} \tag{1—33}$$

［例 39］每季末存 25 元，年息 1 分，每年复利 4 次，求：十年后的本利和。

解法一：用公式 1—31 解。已知条件 A =4×25，代入公式：

$$S'_n(4,4)=\frac{100[(1+\frac{0.1}{4})^{4\times 10}-1]}{0.1}=1685.06 \text{ 元}$$

解法二：利用例 36 的结果和期末年金终值与期初年金终值关系解。

$$S'_n(4,4)=S_n(4.4)\div(1+\frac{0.1}{4})=1727.19\div 1.025$$

$$=1685.06 \text{ 元}$$

解法三：用公式 1—26 解。此时：

$$A=25,n=40,1+R=(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}=(1+0.025)^{\frac{4}{4}}=1.025$$

$$S'_n(4,4)=\frac{25[(1.025)^{40}-1]}{1.025-1}=1685.06\ (\text{元})$$

解法三说明，与公式 1—19 一样，公式 1—26 也是基本公式。在运用公式 1-19 和公式 1-26 时，要注意 R 是与年金发生间隔期相同的实际利率。当不相同时，可用 $(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}=1+R$ 代入公式 1-19 和公式 1-26。R_N 是名义利率，m 是 R_N 期内的复利次数，l 是 R_N 期内的年金发生次数。名义利率一般用年名义利率，相应的"期"就是一年。即 m 是一年内复利的次数，l 是一年内年金发生的次数。

三. 复利年金终值的年金，时期的求法

1. 已知终值，求年金。

［例 40］ 银行存款复利年息 1 分，每年复利一次。每半年初存款 1 次，金额相等，连续 10 年，欲在第十年末得本利和 1 万元。求：每次存入款。

解：根据题意：

$R=0.1$，$l=2$，$n=10$，$S_n(1,l)=10000$。求 $\frac{A}{l}$

代入公式 1—21

$$S_n(1,l)=\frac{A(1+R)^{\frac{1}{l}}[(1+R)^n-1]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]}$$

$$\frac{A}{l}=\frac{10000[(1+0.1)^{\frac{1}{2}}-1]}{(1+0.1)^{\frac{1}{2}}[(1+0.1)^{10}-1]}$$

$$=\frac{488.08848}{1.67153}=292\text{ 元}$$

答: 每半年初应存入 292 元。

2. 已知终值，求时期。

[例 41] 银行存款复利年息 1 分，每年复利 4 次，每年末存入 300 元，几年后可得本利和超过 1万元。

解: 根据题意:

$S'_n(m,l)=10000$，$R_N=0.1$，$m=4$，$A=300$。 求n

代入公式 1—28

$$\text{由 } S'_n(m,l)=\frac{A[(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1]}{(1+\frac{R_N}{m})^{m}-1}\text{ 得:}$$

$$n=\frac{lg\dfrac{S'_n[(1+\frac{R_N}{m})^{m}-1]+A}{A}}{m\,lg(1+\frac{R_N}{m})}$$

$$10000[(1+0.025)l-1]=300[(1+0.25)^{4n}-1]$$

$$(1.025)^{4n}=\frac{100}{3}[(1.025)^{4}-1]+1$$

$$n = \frac{lg\dfrac{100[(1.025)^{4n}-1]+3}{3}}{4lg(1.025)} = 15.13858749 \approx 16\text{ 年}$$

16 年后可得的本利和大大超过 1 万元。(11,144.70 元)

第三节　　复利年金现值

复利计息各期年金现值之总和，称为复利年金现值。也分期初年金和期末年金两种情况。期初年金现值记为 Q_n；期末年金现值记为 Q_n。

一. 复利期初年金现值

与年金终值情况一样，每年复利次数不同，每年付款次数不同，有不同的年金现值计算法。先讨论最基本的情况，即复利期和付款期相同，给定的是实际利率。以年为期，每年初发生年金 A，年息率 R，每年复利一次，求 n 年后所有年金的现值。上述条件的各期年金现值可见下表：

期　　数	1	2	……	n－1	n
每期初发生年金 A，利率 R	A	A	……	A	A
现值，$Q=\dfrac{A}{(1+R)^n}$	A	$\dfrac{A}{1+R}$	……	$\dfrac{A}{(1+R)^{n-2}}$	$\dfrac{A}{(1+R)^{n-1}}$

年金现值是个公比为 $\dfrac{1}{1+R}$ 的等比数列，首项 A。前 n 项之和：

$$Q_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A}{(1+R)^i}=A\cdot\frac{1-(\frac{1}{1+R})^n}{1-\frac{1}{1+R}}=A\frac{(1+R)}{R}[1-(1+R^{-n}]$$

(1-34)

设现值为 Q_n，则 n 期末的终值，按复利的基本计算应为 $Q_n(1+R)^n$。用公式 1-34 代入 Q_n，则:

$$Q_n(1+R)^n=A\frac{(1+R)}{R}[1-(1+R)^{-n}](1+R)^n=A\frac{(1+R)}{R}[(1+R)^n-1]$$

$$=S_n$$

上式正说明了复利期初年金现值和终值的关系。

与年金终值一样，随每年的复利次数不同和付款的次数不同，年金现值公式也有各种变化。

1. 每年复利 m 次，年初发生年金一次。

须将 R 改为 $(1+\frac{R_N}{m})^m-1$，$(1+R)$ 改为 $(1+\frac{R_N}{m})^m$，代入公式 1-34 得:

$$Q_n(m,1)=A\frac{(1+\frac{R_N}{m})^m}{(1+\frac{R_N}{m})^m-1}[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-m\cdot n}] \qquad (1-35)$$

2. 每年复利一次，每年付款 l 次，每年年金总数 A。将公式1-21 乘以$(1+R)^{-n}$ 得:

$$Q_n(1,l)=S_n(1,l)(1+R)^{-n}$$

$$=\frac{A(1+R)^{\frac{1}{l}}[(1+R)^n-1](1+R)^{-n}}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]}$$

$$=\frac{A(1+R)^{\frac{1}{l}}[1-(1+R)^{-n}]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]} \qquad (1-36)$$

3. 每年复利 m 次，每年付款 l 次，每年年金总数 A。

用 $(1+R)=(1+\frac{R_N}{m})^m$，代入公式 1-36 得：

$$Q_n(m,l)=\frac{A(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}\left[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-mn}\right]}{l\left[(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}-1\right]} \qquad (1\text{-}37)$$

4. 每年复利 m 次，每年付款 m 次，每年年金总数 A。

即公式 1-37，用 $m=l$ 代入，得：

$$Q_n(m=l)=\frac{A(1+\frac{R_N}{m})\left[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-mn}\right]}{l\left[(1+\frac{R_N}{m})-1\right]}$$

$$=\frac{A(1+\frac{R_N}{m})\left[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-mn}\right]}{R_N} \qquad (1\text{-}38)$$

5. k 年付款一次，每年复利一次，年息率 R，每次付款 A。

可由年金终值公式 1-24，乘以 $(1+R)^{-n}$ 而得：

$$Q_{\frac{n}{k}}(1,k)=\frac{A(1+R)^k\left[(1+R)^n-1\right](1+R)^{-n}}{(1+R)^k-1}$$

$$=\frac{A(1+R)^k\left[1-(1+R)^{-n}\right]}{(1+R)^k-1} \qquad (1\text{-}39)$$

6. k 年付款一次，每年复利 m 次，年息率 R，每次付款 A。

仅须将公式 1-39 中 (1+R) 改为 $(1+\frac{R_N}{m})^m$ 可得:

$$Q_{\frac{n}{k}}(m,k)=\frac{A(1+\frac{R_N}{m})^{mk}[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-mn}]}{(1+\frac{R_N}{m})^{km}-1} \qquad (1\text{-}40)$$

[例 42] 购买某大型设备用分期付款的方式。设备现价 8,915.85 万元，准备 5 年付清全部货款。年息率 5 厘每半年复利一次。求:5 年中每季度初应付的货款数。

解: 根据题意，$Q_n(m,l)=8,915.85$

$$R_N=0.05,\ m=2,\ n=5,\ l=4,\ 求\ \frac{A}{l}$$

用公式 1-37 求解

$$\frac{A}{l}=\frac{Q_n(ml)[(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}-1]}{(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-mn}]}$$

$$=\frac{8915.85[(1.025)^{\frac{2}{4}}-1]}{(1.025)^{\frac{1}{2}}[1-(1.025)^{-10}]}=500(万元)$$

答: 每季度初应付货款的金额为 500 万元。

[例 43] 分期付款购买彩电，现价 2280 元，年息率 6 厘，每年复利 4 次，现拟于每季度初付款 300 元。求: 几年可以付清。(第一次付款时提货)

解: 现价是第一次付款时的价格，即是期初年金现值。据题意，已知 $Q_n(m=l)=2280$ 元，$R_N=0.06$，$m=4$，

$l=4$, $\frac{A}{l}=300$，求 n。用公式 1-38

$$2280 = 300 \times \frac{1.015\left[1-(1.015)^{-4n}\right]}{0.015}$$

$$\frac{7.6\times 0.015}{1.015}=1-(1.015)^{-4n}$$

$$(1.015)^{-4n} = 1-\frac{7.6\times 0.015}{1.015} = 0.887684729$$

$$n = \frac{lg1.126526}{4lg1.015} = 2$$

二. 复利期末年金现值

在期末年金的情况下，第 1 期年金到期初经过 1 期，其现值 $\frac{A}{1+R}$，余类推。见下表：

期　　数	1	2	……	n－1	n
每期末发生年金 A，利率 R	A	A	……	A	A
现值，$Q=\frac{A}{(1+R)^n}$	$\frac{A}{1+R}$	$\frac{A}{(1+R)^2}$	……	$\frac{A}{(1+R)^{n-1}}$	$\frac{A}{(1+R)^n}$

年金现值仍是一个公比为 $\frac{1}{1+R}$ 的等比数列，首项 $\frac{A}{1+R}$。前 n 项之和：

$$Q'_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{A}{(1+R)^i} = \frac{A}{1+R}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+R}\right)^n}{1-\frac{1}{1+R}}$$

$$= \frac{A}{R}\left[1-(1+R)^{-n}\right] \qquad (1-41)$$

与 Q_n 和 S_n 的关系一样:

$$Q'_n(1+R)^n=\frac{A}{R}[1-(1+R)^{-n}](1+R)^n$$
$$=\frac{A}{R}[(1+R)^n-1]=S'_n$$

与 S_n 和 S'_n 的关系一样:

$$\frac{Q_n}{Q'_n}=\frac{A\frac{1+R}{R}[1-(1+R)^{-n}]}{\frac{A}{R}[1-(1+R)^{-n}]}=1+R \qquad (1-42)$$

又: $Q_{n+1}=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{A}{(1+R)^i}=A+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{A}{(1+R)^i}=A+Q'_n$

与期初年金现值一样,期末年金现值也有相应的变化。利用公式 1-42 及其变化形式,用各期初年金现值公式除以相应的各式,可得各种复利情况和付款情况的期末年金现值公式。

1. 每年复利 m 次,年金年末发生一次,除以 $(1+\frac{R_N}{m})^m$ 得:

$$Q'_n(m,1)=\frac{A}{(1+\frac{R_N}{m})^m-1}\quad[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-m\cdot n}] \qquad (1-43)$$

2. 每年复利一次,每年付款 l 次,每年年金总额 A,除以 $(1+R)^{\frac{1}{l}}$,得:

$$Q'_n(1,l)=\frac{A[1-(1+R)^{-n}]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]} \qquad (1-44)$$

3. 每年复利 m 次，每年付款 l 次，每年年金总额 A，除以$(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}$，得：

$$Q'_n(m,l)=\frac{A[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-mn}]}{l[(1+\frac{R_N}{m})^{\frac{m}{l}}-1]} \tag{1-45}$$

4. 每年复利 m 次，每年付款 m 次，每年年金总额 A，除以 $(1+\frac{R_N}{m})$，得：

$$Q'_n(m=l)=\frac{A[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-mn}]}{l[(1+\frac{R_N}{m})-1]}$$

$$=\frac{A[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-mn}]}{R_N} \tag{1-46}$$

5. k 年付款一次，每年复利一次，年息率 R，每次付款 A，除以$(1+R)^k$，得：

$$Q'_{\frac{n}{k}}(1,k)=\frac{A[1-(1+R)^{-n}]}{(1+R)^k-1} \tag{1-47}$$

6. k 年付款一次，每年复利 m 次，年息率 R，每次付款 A_K，除以 $(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot k}$，得：

$$Q'_{\frac{n}{k}}(m,k)=\frac{A[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-mn}]}{(1+\frac{R_N}{m})^{mk}-1} \tag{1-48}$$

［例 44］某君为储蓄养老金，欲每月提取 100 元，年息 1 分 2 厘，一年复利一次，够 10 年提取之用，现应存钱多少？

解：从常识上，第一次提款与存款之日要相差一个月，故这是个期末年金现值问题。根据意已知：

$$\frac{A}{l}=100\text{ 元},\ l=12,\ R_N=0.12,\ n=10。\text{求 } Q_n^{\prime}(1.l)$$

用公式 1-44 求解

$$Q_n^{\prime}(1,12)=\frac{100[1-(1+0.12)^{-10}]}{(1+0.12)^{\frac{1}{12}}-1]}=7145.55\approx 7146\text{ 元}$$

［例 45］例 44 中，若欲每年底提 1200 元，求 10 年前的现值。

解：这乃是一个期末年金现值，

$A=1200,\quad n=10, R=0.12$。 求 Q'_n

用公式 1—41 求解

$$Q_n^{\prime}=\frac{1200}{0.12}[1-(1.12)^{-10}]=6780.27\text{ 元}$$

试比较例 45 和例 44 的结果。年度年金总额都是 1200 元，例 44 是分 12 次发生，例 45 是一次发生。由于是期末年金，分次发生后，实际上使资金发生期提前，此时，无论算终值还是现值，在利率和期数不变的条件下，必然是分次发生的期末年金的终值或现值大于一次发生的期末年金的终值或现值。这就是例 44 的现值大于例 45 现值的原因。

期初年金的情况正好相反。一次发生年金总额都在期初，分次发生后，实际上是推迟了资金的发生期，也即减少了计息期，此时，必然是分次发生的期初年金的终值或现值小

于一次发生的期初年金的终值或现值。前面例 34 与例 32 已说明了这一点。

[例 46] 某航空公司拟添置新飞机壹架，每年增加收益 80 万元，使用 15 年后报废。购买该飞机现价为 400 万元。如果租借该飞机，则每年初付租金 40 万元，试以复利年息 1 分，分别计算购机和租机两种方案的净收益现值。

解：两种方案的年收益相同。收益是年底结算，所以是期末年金，每年收益 80 万元，15 年的现值是：

$$Q'_n = \frac{80}{0.1}[1-(1.1)^{-15}] = 608.486 \text{ 万元}$$

每年初付租金是期初年金，每年 40 万，15 年的现值是：

$$Q_n = \frac{40\,(1+0.1)}{0.1}[1-(1.1)^{-15}] = 334.667 \text{ 万元}$$

购买飞机的净收益是：

608.486－400 ＝208.486 万元

租借飞机的净收益是：

608.486－334.667 ＝ 273.819 万元

第四节　连续复利和连续年金

一. 连续复利的概念

复利的名义利率为 R_N。实际利率的大小，由名义利率内复利的次数 m 所决定：$1+R = (1+\frac{R_N}{m})^m$。当 m 趋于无限次时，则计息的间隔期趋向无穷小，此时复利，即"利滚利"，时时刻刻在进行着。这种情况定义为连续复利。

连续复利在银行业务中很少实用。其思路可运用于投资问题。在投资的实务中，假定 P 是期初投资的数额，R 是资金利润率，n 是投资的时间，S 是 n 期末的资金终值，在实际问题中，S 是连续变化的，而不是一期一期跳跃变化的，此时，即可视为连续复利。为简化表述，在连续复利的计算中，设 $R=R_N$。

二. 连续复利的计算

当 m 趋于无穷大时，$(1+\frac{R_N}{m})^m$ 的极限:($\because R_N=R$)

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{R}{m})^m=\lim_{m\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{m}{R}})^{\frac{m}{R}}]^R=e^R$$

连续复利的本利和

$$S=\lim_{m\to\infty}P(1+\frac{R}{m})^{m\cdot n}=Pe^{nR} \tag{1-49}$$

连续复利的利息

$$I=S-P=Pe^{n\cdot R}-P=P(e^{nR}-1) \tag{1-50}$$

[例 47] 投资 1 万元，按年息率 12% 连续复利。求：10 年后投资额的终值。

解：$S=Pe^{n\cdot R}=10000\cdot e^{10\times0.12}=33201.17$ 元

[例 48] 投资 1 万元，按年息率 1.2 分连续复利。求：几年后可达到终值 5 万元。

解：已知：

$P=10000$，$S=50000$，$R=0.12$，

$S=Pe^{n\cdot R}$

$n\cdot R\ln e=\ln5$

$$n = \frac{\ln 5}{0.12} = 13.4 \text{ 年}$$

三. 连续复利的名义利率和实际利率

由连续复利的名义利率求实际利率:

$$1+R_E = \lim_{m \to \infty}\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^m = e^R$$

则: $R_E = e^R - 1$

[例 49] 连续复利的名义利率为年息率 5 厘, 求年实际利率。

解: $R_E = e^{0.05}-1 = 1.05127-1 = 0.05127$

由连续复利的实际利率求名义利率。

$\because e^R = 1+R_E \quad \therefore R = \ln(1+R_E)$

[例 50] 连续复利的年实际利率为 5 厘, 求年名义利率。

解: $R = \ln(1+R_E) = \ln(1+0.05) = 0.04879$

四、连续年金

假如某企业平均每年收益 36000 元, 则平均每月收益 3000 元, 每天收益 100 元, 每天八个工作时, 每工作时收益 12.5 元等等。在每个周期内均匀地 (收) 支固定年金 A, 称为连续年金或称均匀流年金或现金流。很明显, 连续年金没有期初和期末的区别。企业的日常收支, 即可视为一种连续年金。

前列每年交款 l 次之终值 (期末年金) 公式如下:

$$S_n(1,l)=\frac{A[(1+R)^n-1]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]} \tag{1-29}$$

连续年金，即每年交款次数 l 趋于无穷大，求其终值，记为 $\overline{S}_n$，则：

$$\overline{S}_n=\lim_{l\to\infty}\frac{A[(1+R)^n-1]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]} \tag{1-51}$$

将 $(1+R)^{\frac{1}{l}}$ 作二项式展开：

$$(1+R)^{\frac{1}{l}}=1+\frac{1}{l}R+\frac{\frac{1}{l}(\frac{1}{l}-1)}{2!}R^2+\frac{\frac{1}{l}(\frac{1}{l}-1)(\frac{1}{l}-2)}{3!}R^3+\cdots$$

以之代入上式求极限：

$$\lim_{l\to\infty}l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]=\lim_{l\to\infty}l[(1+\frac{1}{l}R+\frac{\frac{1}{l}(\frac{1}{l}-1)}{2!}R^2+\frac{\frac{1}{l}(\frac{1}{l}-1)(\frac{1}{l}-2)}{3!}R^3+\cdots\cdots)-1]$$

$$=\lim_{l\to\infty}[R+\frac{(\frac{1}{l}-1)}{2!}R^2+\frac{(\frac{1}{l}-1)(\frac{1}{l}-2)}{3!}R^3+\cdots\cdots]$$

$$=R-\frac{R^2}{2}+\frac{R^3}{3}-\cdots\cdots=ln(1+R)$$

于是，公式 1-51

$$\overline{S}_n = \lim_{l \to \infty} \frac{A[(1+R)^n - 1]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}} - 1]} = \frac{A[(1+R)^n - 1]}{ln(1+R)} \tag{1-51}$$

上面公式1—51由期末年金终值推导而出。如果用期初年金终值公式1-21

$$S_n(1,l) = \frac{A(1+R)^{\frac{1}{l}}[(1+R)^n - 1]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}} - 1]}$$ 来推导，因为：

$\lim\limits_{l \to \infty}(1+R)^{\frac{1}{l}} = (1+R)^0 = 1$，其结果是一样的。这正符合连续年金的概念和特点。

依同一理由，连续年金的现值记为 $\overline{Q}_n$，计算公式如下：

$$\overline{Q}_n = \frac{A[1-(1+R)^{-n}]}{ln(1+R)} \tag{1-52}$$

［例51］ 每年收益1万元，年息率1分。求下列条件的5年末的终值：① 年初发生，② 年末发生，③ 均匀收入，④ 分52次收入。

解：1. $S_n = \frac{A(1+R)[(1+R)^n - 1]}{R} = \frac{10000 \times 1.1}{0.1}[(1.1)^5 - 1]$

$= 67156.1$ 元

2. $S'_n = \frac{A[(1+R)^n - 1]}{R} = \frac{10000}{0.1}[(1.1)^5 - 1] = 61051$ 元

3. $\overline{S}_n = \frac{A[(1+R)^n - 1]}{\ln(1+R)} = \frac{10000[(1.1)^5 - 1]}{\ln(1.1)} = 64055$ 元

4. 因没有说明期初期末，试以二种条件求解：

$$S_n(1,52) = \frac{A(1+R)^{\frac{1}{52}}[(1+R)^n - 1]}{52[(1+R)^{\frac{1}{52}} - 1]}$$

$$=\frac{10000(1.1)^{\frac{1}{52}}\ [(1.1)^5-1]}{52[(1.1)^{\frac{1}{52}}-1]}$$

$$=64113.79\text{ 元}$$

$$S'_n(1,52)=\frac{A[(1+R)^5-1]}{52[(1+R)^{\frac{1}{52}}-1]}=63996.38\text{ 元}$$

比较上例各答案，$S_n>S_n(1,52)>\overline{S_n}>S'_n(1,52)>S'_n$ 是符合逻辑的。每星期发生一次的年金终值已是比较均匀，与均匀流很接近。再比较：$\frac{1}{2}(S_n+S'_n)=64103.55$，与 $\overline{S}_n$ 要相差 48.55 元；而 $\frac{1}{2}(S_n(1,52)+S'_n(1,52))=64055.085$，与 $\overline{S}_n$ 只相差 0.085 元。

［例 52］ 按例 51 的条件求现值。

解：1. $Q_n=\dfrac{A(1+R)[1-(1+R)^{-n}]}{R}=\dfrac{10000(1.1)[1-(1.1)^{-5}]}{0.1}$

$$=41698.64\text{ 元}$$

2. $Q'_n=\dfrac{A[1-(1+R)^{-n}]}{R}=\dfrac{10000[1-(1.1)^{-5}]}{0.1}$

$$=37907.88\text{ 元}$$

3. $\overline{Q}_n=\dfrac{A[1-(1+R)^{-n}]}{\ln(1+R)}=\dfrac{10000[1-(1.1)^{-5}]}{\ln(1.1)}$

$$=39773.16\text{ 元}$$

4. $Q_n(1,52)=\dfrac{A(1+R)^{\frac{1}{52}}[1-(1+R)^{-n}]}{52[(1+R)^{\frac{1}{52}}-1]}$

$$= \frac{10000(1.1)^{\frac{1}{52}}[1-(1.1)^{-5}]}{52[(1.1)^{\frac{1}{52}}-1]}$$

$$= 39809.62\text{ 元}$$

$$Q'_n(1,52) = \frac{A[1-(1+R)^{-n}]}{52[(1+R)^{\frac{1}{52}}-1]}$$

$$= \frac{10000[1-(1.1)^{-5}]}{52[(1.1)^{\frac{1}{52}}-1]}$$

$$= 39736.72\text{ 元}$$

试比较例 52 结果，与例 51 有同样的特点：

$Q_n > Q_n(1,52) > \overline{Q}_n > Q'_n(1,52) > Q'_n$

$\frac{1}{2}(Q_n(1.52)+Q'_n(1.52)) = 39773.17$ 元，与 $\overline{Q}_n$ 相比，只差 0.01 元。

［例 53］ 现投资 5 万元，投资后即能生效，每年可均匀收入 1 万元，年利率 1 分 2 厘。问几年可收回投资。

解：这是连续年金现值求时期问题。

已知 $\overline{Q}_n = 5, A = 1, R = 0.12$，求 n.

$$\overline{Q}_n = \frac{A[1-(1+R)^{-n}]}{ln(1+R)}$$

$$1-(1+R)^{-n} = \frac{\overline{Q}_n ln(1+R)}{A}$$

$$\frac{1}{(1+R)^n}=\frac{A-\overline{Q}_n\, ln(1+R)}{A}$$

$$(1+R)^n=\frac{A}{A-\overline{Q}_n ln(1+R)}$$

$$n=\frac{ln\dfrac{A}{A-\overline{Q}_n\, ln(1+R)}}{ln(1+R)}$$

$$=\frac{ln\dfrac{1}{1-5ln(1.12)}}{ln(1.12)}=7.38\text{ 年}$$

五. 连续复利年金

每次发生年金后，用连续复利计息计算终值和现值，称连续复利年金。这里与年金连续发生是不同的概念。年金 A 发生后，用连续复利计息，终值 $S=Ae^{iR}$，现值 $Q=\frac{A}{e^{iR}}$。n 期期初年金连续复利终值分别是:

Ae^{R}，Ae^{2R}，……$Ae^{(n-1)R}$，Ae^{nR}。这是公比为 e^R 的等比数列，其 n 项和:

$$S_n=\frac{Ae^R(e^{n\cdot R}-1)}{e^R-1} \tag{1-53}$$

上述公式也可从公式 1—20 推导而来。公式 1—20 中，$m\to\infty$ 即是连续复利年金终值:

$$S_n=\lim_{m\to\infty}\frac{A(1+\frac{R_N}{m})^m[(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot n}-1]}{(1+\frac{R_N}{m})^m-1}$$

$$= \frac{Ae^{R}(e^{n \cdot R}-1)}{e^{R}-1}$$

同理,期末年金连续复利终值也可从两种方法得到。

$$S'_n = \frac{A(e^{n \cdot R}-1)}{e^{R}-1} \tag{1-54}$$

连续复利期初年金现值:

$$Q_n = \lim_{m \to \infty} \frac{A(1+\frac{R_N}{m})^m \left[1-(1+\frac{R_N}{m})^{-m \cdot n}\right]}{(1+\frac{R_N}{m})^m - 1}$$

$$= \frac{Ae^{R}(1-e^{-n \cdot R})}{e^{R}-1} \tag{1-55}$$

连续复利期末年金现值:

$$Q'_n = \frac{Q_n}{\lim\limits_{m \to \infty}(1+\frac{R_N}{m})^m} = \frac{Q_n}{e^{R}}$$

$$= \frac{A(1-e^{-n \cdot R})}{e^{R}-1} \tag{1-56}$$

[例 54] 每年收益 1 万元,年息率 1 分,连续复利。求下列条件下 5 年的终值和现值: ① 年初发生,② 年末发生。

解: 1. 年末发生 5 年终值:

$$S'_n = \frac{A(e^{nR}-1)}{e^{R}-1}$$

$$=\frac{10000(e^{0.5}-1)}{e^{0.1}-1}=61682.57\text{ 元}$$

2. 年初发生 5 年终值:

$$S_n=\frac{Ae^{R}(e^{nR}-1)}{e^{R}-1}$$

$$=\frac{10000e^{0.1}(e^{0.5}-1)}{e^{0.1}-1}=68169.78\text{ 元}$$

3. 年末发生 5 年现值

$$Q'_n=\frac{A(1-e^{-n\cdot R})}{e^{R}-1}$$

$$=\frac{10000(1-e^{-0.5})}{e^{0.1}-1}=37412.37\text{ 元}$$

4. 年初发生 5 年现值

$$Qn=\frac{Ae^{R}(1-e^{-n\cdot R})}{e^{R}-1}$$

$$=\frac{10000.e^{0.1}(1-e^{-0.5})}{e^{0.1}-1}=41347.06\text{ 元}$$

比较例 54 与例 52 和例 51 的结果:

连续复利的年金终值大于例 51 一般复利的年金的终值;连续复利的年金现值小于例 52 一般复利的年金现值。

六. 连续年金连续复利

前面,分别讨论了连续年金每年复利一次和一次年金连

续复利的情况。如果是连续年金又用连续复利计息，计算其终值和现值，即是前面每年复利 m 次，每年付款 m 次，m 趋于无穷。此时，计算其终值，用公式 1-31，m→∞ 求极值。

$$\overline{S}_n = \lim_{m\to\infty}\frac{A\left[\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{m\cdot n}-1\right]}{R_N}$$

$$=\frac{A}{R_N}(e^{n\cdot R}-1) \tag{1-57}$$

用期初年金终值公式 1-23，m→∞ 求极值也可得到同样的结果，因为

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R_N}{m}\right)=1$$

同样，计算其现值，用公式 1-38 或公式 1-46，m→∞ 求极值。

$$\overline{Q}_n = \lim_{m\to\infty}\frac{A\left[1-\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{-mn}\right]}{R_N}$$

$$=\frac{A}{R_N}(1-e^{-nR}) \tag{1-58}$$

[例 55] 每年收益 1 万元，连续发生，年息率 1 分，连续复利。求：5 年的终值和现值。

解：1. 终值

$$\overline{S}_n=\frac{A}{R_N}(e^{n\cdot R}-1)=\frac{10000}{0.1}(e^{0.5}-1)$$

$$= 64872.13 \text{元}$$

2. 现值

$$\overline{Q}_n = \frac{A}{R_N}(A - e^{-n \cdot R}) = \frac{10000}{0.1}(1 - e^{-0.5})$$

$$= 39346.93 \text{元}$$

第五节　复利表

在复利的各种计算中，经常用到高次乘方和开方以及对数和反对数的运算。运用电子计算器，这些计算现在已是很方便的了。而在过去则是借助于复利计算表来计算。同样，今天如能手持一册复利表并用计算器，能使计算更简化。另外，在前面的复利年金的各种运算中，我们都避开了求利率。这是因为要解 R 的 n 次方程。如果 $n>4$，高次方程的解则是非常复杂的问题。但是如果借助于复利表，求利率就非常简单了。

一．复利表结构和用法

归纳复利计算的主要公式，有一次本金和年金两种情况。一次本金有：

1. 已知：本金 P，期数 n，利率 R，求 S。

$S = P(1+R)^n$，$(1+R)^n$ 是复利因数（有的表称为复利系数）。将 $(1+R)^n$ 列成表，从表中可查出已知 R、n 的 $(1+R)^n$ 值。再乘以 P，得到 S。上述关系可记为 (S/P.R.n)。

2. 已知：S、n、R，求 P，记为 (P/S.R.n)。

$P = \dfrac{S}{(1+R)^n}$，$\dfrac{1}{(1+R)^n}$ 是现值因数，也称贴现因数等．

将$\frac{1}{(1+R)^n}$列成表，从表中可查出已知R.n的$(1+R)^{-n}$值，再乘以已知的S，可得到所求的本金P。

等额年金（有的表称之为等额序列）的主要公式以期末年金为代表。求期初年金用期末年金现值或终值数乘以$(1+R)$即可。主要公式有：

3. 已知：A、R、n，求S'_n，记为$(S'_n/A.R.n)$。

$$S'_n = A\frac{(1+R)^n-1}{R}, \quad \frac{(1+R)^n-1}{R}$$

称为年金复利因数（或系数）。将其列成表，从表中可查出已知R.n的$\frac{(1+R)^n-1}{R}$的值，再乘以每期等额年金A，即得到期末年金终值S'_n。欲求期初年金终值S_n，可再乘以$(1+R)$。

4. 已知：S'_n、R、n，求A，记为$(A/S'_n.R.n)$。

$$A = S'_n\frac{R}{(1+R)^n-1}, \quad \frac{R}{(1+R)^n-1}$$

称为偿债基金因数（或系数）。其经济含意是，在给定的n年限内为偿还n年末终值为S'_n的债务，每年末应偿还的S'_n的系数。将$\frac{R}{(1+R)^n-1}$列成表，用法同上。如果欲求每年初的偿还数，则再除以$(1+R)$。

5. 已知：A、R、n，求Q'_n，记为$(Q'_n/A.R.n)$。

$$Q'_n = A\frac{1-(1+R)}{R}, \quad \frac{1-(1+R)}{R} = \frac{(1+R)^n-1}{R(1+R)^n}$$

称为年金现值因

数 (或系数)。将其列成表，用法同上。如已知条件给定的是期初年金，则用此表再乘以 (1+R)。

6. 已知: Q'_n、R、n，求 A，记为 $(A/Q'_n.R.n)$。

$$A = Q'_n \frac{R}{1-(1+R)^{-n}}, \frac{R}{1-(1+R)^{-n}} = \frac{R(1+R)^n}{(1+R)^n-1}$$ 称为资本回收 (或年赋金) 因数 (或系数)。其经济含意是，在给定的 n 年内，为回收现在的投资 Q'_n，每年末应收回的 Q'_n 的系数。将其列成表，用法同上。如欲求年初回收数，则再除以 (1+R)。

上述六种系数，每种系数可以单独列表，则共有六种表，分别称为复利终值系数表、复利现值系数表、年金终值系数表、年金现值系数表、偿债基金系数表和资金回收系数表。我国著名会计学家李鸿寿教授在 1935 年 3 月编纂出版的《会计数学用表》中，便列有上述六种表。各表的利率从 0.25% 到 20%，复利期从 1 到 300。表内的各系数详尽到 10 位小数。其格式见附表 Ⅰ.Ⅱ.Ⅲ.Ⅳ。

上述六种系数，还可以编在一张表内。[世界银行] J. 普赖斯·吉廷格编，1973 年出版的《复利表和贴现表》，便是采用此编排方法。其格式见附表 Ⅴ。此表以利率为眉标，在每一挡利率下，列有 1 到 50 期的六种系数。精确到六位小数。

在查表解题时，要注意，表中系数中的 R 是在计息周期内复利次数为 1 的实际利率，表中的 n 是实际利率的计息次数。当每年的复利次数和付款次数变化时，查表要注意 R 与 n 的对应。

例如:公式 1-28

$$S'_n(m.1)=\frac{A[(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1]}{(1+\frac{R_N}{m})^m-1}$$

$$=A\cdot\frac{(1+\frac{R_N}{m})^{mn}-1}{\frac{R_N}{m}}\times\frac{\frac{R_N}{m}}{(1+\frac{R_N}{m})^m-1}$$

可分别查利率为 $\frac{R_N}{m}$ 的 mn 栏的年金复利因数和 m 栏偿债因数再相乘。

公式 1-29

$$S'_n(1,l)=\frac{A[(1+R)^n-1]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]}$$

$$=A\cdot\frac{[(1+R)^n-1]}{R}\cdot\frac{R}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]}$$

$\frac{(1+R)^n-1}{R}$ 可直接查表;而 $\frac{R}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]}$ 可另外计算。

公式 1-31

$$S'_n(m=l)=\frac{A[(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot n}-1]}{R_N}=\frac{A}{m}\cdot\frac{(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot n}-1}{\frac{R}{m}}$$

可查利率为 $\frac{R_N}{m}$ 的 mn 栏的年金复利因数,再乘以年金 $\frac{A}{m}$。

公式 1-32

$$S'_{\frac{n}{k}}=\frac{A[(1+R)^n-1]}{(1+R)^k-1}$$

$$= A\,\frac{(1+R)^n-1}{R}\cdot\frac{R}{(1+R)^k-1}$$

可分别查利率为 R 的 n 栏的年金复利因数和 K 栏的偿债因数，再相乘。

公式 1-33

$$S'_{\frac{n}{k}}=\frac{A\left[\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{m\cdot n}-1\right]}{\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{m\cdot k}-1}$$

$$=A\,\frac{\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{R_N}{m}}\times\frac{\frac{R_N}{m}}{\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{m\cdot k}-1}$$

可分别查利率为 $\frac{R_N}{m}$ 的 mn 栏的年金复利因数和 m · k 栏的偿债因数再相乘。

二. 应用复利求利息率

如果是一次本金求利率，$R=\sqrt[n]{\frac{S}{P}}-1$，计算简单。已知年金、时期、年金终值或现值，求利率，要解高次方程，很复杂。但如有复利表，则可从表中寻出近似之利率，再用推值法，可推算出其正确利率。

1. 已知期末年金终值、年金、时期，求利率。

［例 56］ 每年底存款 50 元，复利每年一次，7 年后共得 400 元，求利率。

解： $S'_n = A \cdot \frac{(1+R)^n - 1}{R}$ $S'_n = 400$，$A = 50$，$n = 7$

$$\frac{(1+R)^7 - 1}{R} = \frac{S'_n}{A} = 8$$

查年金终值系数表（或年金复利因数）n = 7 栏，得：

$R = 0.04$	$\frac{S'_n}{A} = 7.8982945$	8	$+0.1017055$
$R = 0.045$	$\frac{S'_n}{A} = 8.0191518$	8	-0.0191518
增加 0.005	增加 0.1208573		

由此可知其利率在 4 厘与 4 厘 5 毫之间。已知 8 比 7.8982945 多 0.107055。所以，所求利率为：

$$0.04 + \frac{8 - 7.8982945}{8.0191518 - 7.8982945} \times 0.005$$

$$= 0.04 + \frac{0.1017055}{0.1208573} \times 0.005 = 0.04 + 0.0042$$

$$= 0.0442$$

或：$$0.045 - \frac{8.0191518 - 8}{8.0191518 - 7.8982945} \times 0.005$$

$$= 0.045 - \frac{0.0191518}{0.1208573} \times 0.005 = 0.0442$$

上述求得的是实利率。求得实利率后，可按付款与复利次数，求得相应的名义利率。

(1) 每年复利 m 次，年金发生一次。

$$S'_n(m,l)=\frac{A\left[\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{mn}-1\right]}{\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{m}-1}$$

$$\frac{\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{m}-1}=\frac{S'_n(m.l)}{A}$$

此时，查年金复利因数表，得到的是 R_E

$$1+R_E=\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{m}$$

$$R_N=m\left[(1+R_E)^{\frac{1}{m}}-1\right]$$

(2) 每年复利一次，每年付款 l 次，每年年金总数 A，全年实利率 R。则每期即 $\frac{1}{l}$ 年的实利率为 R_l。

$R_l=(1+R)^{\frac{1}{l}}-1$，此时查表得到的是 R_l。

则：$1+R_l=(1+R)^{\frac{1}{l}}$

$R=(1+R_l)^{l}-1$

(3) 每年复利 m 次，每年付款 l 次，每年年金总数 A。

每年付款 l 次，其每期之实利率为 R_l，全年实利率为 $R=(1+R_l)^{l}-1$，每年复利 m 次，全年之实利率为 $R=\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{m}-1$。查表 m.$l$ 栏，此时查表得到的是 R_l。

$$(1+R_l)^l-1=(1+\frac{R_N}{m})^m-1$$

$$R_N=m[(1+R_l)^{\frac{l}{m}}-1]$$

(4) 每年复利 m 次，每年付款 m 次，每年年金总数 A。

即是上式中 $m=l$，则：$R_N=l\cdot R_l$。

(5) k 年付款一次，每年复利一次，每次年金 A。

此时，假设每期 (k 年) 的实际利率 R_K，查表 $\frac{n}{k}$ 栏，得到的是 R_K。R_K 与 R_E 有如下关系：

$R_K=(1+R_E)^K-1$ 则：

$R_E=(1+R_K)^{\frac{1}{K}}-1$

(6) k 年付款一次，每次年金 A，每年复利 m 次。则：

$R_K=(1+\frac{R_N}{m})^{mk}-1$。查表 $\frac{n}{k}$ 栏，得到的是 R_K。

$R_N=m[(1+R_K)^{\frac{1}{m\cdot k}}-1]$

如应用上述之 R_l 及 R_K，相应年金公式则变形为：

$$S_n(1.l)=\frac{A}{l}\cdot\frac{(1+R_l)^{n\cdot l}-1}{R_l}$$

$$或\ S'_{\frac{n}{k}}(1,k)=A_K\frac{(1+R_K)^{\frac{n}{k}}-1}{R_K}$$

A_K 表示 k 年发生一次年金。从年金终值系数表中查得的利率分别是 R_l，R_K，再求 R_E 或 R_N。

[例 57] 每月底收益 16.54 万元，每半年复利一次，6 年可得 1，425.93 万元。求收益率。

解：$S'_n = \frac{A}{l} \cdot \frac{(1+R_l)^{n\cdot l}-1}{R_l}$　　$S'_n = 1425.93$，$\frac{A}{l} = 16.54$

$l = 12$，$n = 6$，$m = 2$

$$\frac{(1+R_l)^{72}-1}{R_l} = \frac{1425.93}{16.54} = 86.211$$

查年金终值系数表，n = 72 栏，得：

R = 0.005	终值为　86.4088
R = 0.0025	终值为　78.7794
减少 0.0025	减少　7.6294

$$R_l = 0.0025 + \frac{86.211-78.7794}{86.4088-78.7794} \times 0.0025$$

$$= 0.0025 + \frac{7.432}{7.6294} \times 0.0025$$

$$= 0.0025 + 0.002435 = 0.004935$$

此即每月实利率 0.004935。本题中，每半年复利一次，即 m = 2。

$$R_N = m[(1+R_l)^{\frac{l}{m}}-1] = 2[(1.004935)^{\frac{12}{2}}-1]$$

$$= 0.06$$

2. 已知期初年金终值、年金、时期，求利率。

由期初年金和期末年金终值的关系：$S_n = S'_{n+1} - A$ 可得：

$$S_n = A\left[\frac{(1+R)^{n+1}-1}{R} - 1\right]$$

$$\frac{(1+R)^{n+1}-1}{R} = \frac{S_n}{A} + 1 \qquad (1\text{-}59)$$

由期末年金终值系数表的 n+1 栏，即可得到所求利率 R。

[例 58] 每年初存 1000 元，期 5 年，5 年底可得 5,801.91 元，求年利率。

解：$$\frac{(1+R)^{n+1}-1}{R}=\frac{S_n}{A}+1=6.80191$$

在期末年金终值系数表 n = 6 栏里，查得 R = 0.05。

如每年付款 l 次，则可用同样的理由得到下式：

$$\frac{S_n\cdot l}{A}+1=\frac{(1+R_l)^{nl+1}-1}{R_l} \tag{1-60}$$

如 k 年付款一次，则其利率由下式求之：

$$\frac{S_n}{A_K}+1=\frac{(1+R_K)^{\frac{n}{k}+1}-1}{R_K} \tag{1-61}$$

由期末年金终值系数表的 $nl+1$ 栏和 $\frac{n}{k}+1$ 栏，可分别求得 R_l 和 R_K，再据此求得 R_E 或 R_N。

3. 已知期末年金现值、年金、时期，求利率。

[例 59] 现存 5,554.48 元，每季底取 1000 元，恰 6 次取完。每年复利四次，求季度利率。

解：$$Q'_n=A\cdot\frac{1-(1+R)^{-n}}{R}$$

$$\frac{1-(1+R)^{-6}}{R}=\frac{Q'_n}{A}=5.55448$$

查年金现值系数表，n = 6 栏，得：

$$R=0.02 \qquad \frac{Q'_n}{A}=5.6014308$$

$$\begin{array}{ll} \underline{R = \ 0.025} & \underline{\dfrac{Q'_n}{A} = \ 5.5081253} \\ \quad +0.005 & \qquad\qquad -0.0933055 \end{array}$$

$$R = 0.02+\frac{5.55448-5.6014308}{-0.0933055}\times 0.005$$

$$= 0.02+\frac{0.0469508}{0.0933055}\times 0.005$$

$$= 0.02+0.0025 = 0.0225 = 2.25\%$$

与年金终值求利率同理，按每年付款与复利次数不同，查表求得的实利率的方法以及名义利率的换算，也有如下变化：

(1) 每年复利 m 次，年金发生一次。

此时查表求得的是实利率 R_E；名义利率：

$$R_N = m[(1+R_E)^{\frac{1}{m}}-1]$$

(2) 每年复利一次，每年付款 l 次。

［例 60］ 以 1500 元的购置一台电冰箱，先付 500 元。余 1000 元，加付利息 8%，即 1000 元加 80 元共 1080 元，分 12 个月付清，每月付 90 元。求年实际利率是多少？

解：设每个月的实际利率为 R_l，共有 $n \cdot l = 12$ 个月。

$$Q'_n = \frac{A \cdot [1-(1+R_l)^{-n \cdot l}]}{lR_l}$$

$$1000 = 90\times\frac{1-(1+R_l)^{-12}}{R_l}$$

$$\frac{1-(1+R_l)^{-12}}{R_l} = 11.11111$$

查年金现值系数表，n = 12 栏，并用推值法求得：

$R_l = 0.012045$

$R = (1+R_l)^l - 1 = (1.012045)^{12} - 1 = 15.45\%$

(3) 每年复利 m 次，每年付款 l 次。

查表求得的是每次的实际利率 R_l，查表 $n = m \cdot l$ 栏，年名义利率：

$$R_N = m[(1+R_l)^{\frac{l}{m}} - 1]$$

(4) 每年复利 m 次，每年付款 m 次。

即是上式中 $m = l$，则：$R_N = l \cdot R_l$

例如，例 59 的年利率为：$4 \times 0.0225 = 0.09$

(5) k 年付款一次，每年复利一次，每次年金 A。

[例 61] 现投资 4,202.08 万元，以后十年，每二年底可收益 1000 万元。求：年投资收益率。

解：以 R_k 作为每 k 年的实际利率，k=2。

$$Q'_{\frac{n}{k}} = A\frac{1-(1+R_K)^{\frac{n}{k}}}{R_K}$$

$$4,202.08 = 1000 \times \frac{1-(1+R_K)^{-5}}{R_K}$$

$$4,20208 = \frac{1-(1+R_K)^{-5}}{R_K}$$

查年金现值系数表 $\frac{n}{k} = 5$ 栏，并用推值法计算，得：$R_K = 0.0609$

$R_E = (1+_K)^{\frac{1}{k}} - 1 = (1.0609)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.03$

答：年投资收益率为 3%。

(6) k 年付款一次，每年复利 m 次，每次年金 A。

查 $\frac{n}{k}$ 栏，得到的是 R_K。在每年复利 m 次的情况下，年名义

利率:

$$R_N = m[(1+R_K)^{\frac{1}{m\cdot k}} - 1]$$

[例 62] 现投资 4196.78 万元,每年复利二次,以后十年,每二年底可取 1000 万元。求:年投资收益率。

解: $$\frac{1-(1+R_k)^{-\frac{n}{k}}}{R_K} = \frac{Q'_{\frac{n}{k}}}{A} = 4.19678$$

查年金现值系数表 $\frac{n}{k} = 5$ 栏,并推值计算得:
$R_K = 6.1374\%$

即二年期,每年复利二次的真利率 R_K 为 6.1374%。年名义利率:

$$R_N = m[(1+R_k)^{\frac{1}{m\cdot k}} - 1] = 2[(1.061574)^{\frac{1}{4}} - 1] = 3\%$$

综观上述各种情况下求利率的计算,其原理与由终值求利率的各种方法相同。如应用 R_l 与 R_k,相应的年金现值公式应变形为:

$$Q'_n(1, l) = \frac{A}{l} \cdot \frac{1-(1+R_l)^{-n\cdot l}}{R_l}$$

$$\text{或 } Q'_{\frac{n}{k}}(1, k) = A_K \frac{1-(1+R_k)^{-\frac{n}{k}}}{R_K}$$

4. 已知期初年金现值、年金、时期,求利率。

由期初年金现值和期末年金现值的关系:

$$Q_n = Q'_{n-1} + A$$

$$Q_n = A\left[\frac{1-(1+R)^{-(n-1)}}{R} + 1\right]$$

$$\frac{Q_n}{A} - 1 = \frac{1-(1+R)^{-(n-1)}}{R} \qquad (1-62)$$

由期末年金现值系数表的 $n-1$ 栏，即可得到所求利率 R。

如每年付款 l 次，则可由同理得下式：

$$\frac{Q_n \cdot l}{A}-1=\frac{1-(1+R_l)^{-(nl-1)}}{R_l} \qquad (1—63)$$

如 k 年付款一次，则其利率由下式求之：

$$\frac{S_n}{A_K}-1=\frac{1-(1+R_K)^{-(\frac{n}{k}-1)}}{R_K} \qquad (1—64)$$

由期末年金现值系数表的 $nl-1$ 栏和 $(\frac{n}{k}-1)$ 栏，可分别求得 R_l、R_K，再据此求得 R_E 或 R_N。

［例 63］ 现存 8,915.84 元，每三个月初取 500 元，5 年取完，每年复利二次。求年名义利率。

解：$$\frac{Q_n \cdot l}{A}-1=\frac{1-(1+R_l)^{-(nl-1)}}{R_l}$$

$$l=4,\ n=5,\ m=2,\ Q_n=8915.84,\ A=2000$$

$$\frac{8915.84}{500}-1=\frac{1-(1+R_l)^{-19}}{R_l}$$

$$16.83168=\frac{1-(1+R_l)^{-19}}{R_l}$$

由年金现值系数表 $n=19$ 栏内查出与 16.83168 最相近之利率如下：

$R=1\%$ $\qquad n=19 \qquad Q_n=17.2260085$

$$R = \frac{1.25\%}{+0.25\%} \qquad n = 19 \qquad \frac{Q_n = 16.8193076}{-0.4067009}$$

$$\therefore R_l = 1\% + \frac{16.83168 - 17.2260085}{16.8193076 - 17.2260085} \times 0.25\%$$

$$= 1\% + \frac{-0.394328}{-0.4067009} \times 0.25\% = 1.242394\%$$

$$R_N = m[(1+R_l)^{\frac{l}{m}} - 1] = 2[(1.01242394)^{\frac{1}{2}} - 1]$$
$$= 5\%$$

［例 64］　某幢商品房现价 4454.31 万元，购买分十年付款，每二年初付 1000 万元，每半年复利一次。求年利率。

解：$$\frac{Q_n}{A} - 1 = \frac{1-(1+R_K)^{-(\frac{n}{k}-1)}}{R_K}$$

$$Q_n = 4454.31,\ n = 10,\ A = 1000,\ k = 2$$

$$3.45431 = \frac{1-(1+R_K)^{-4}}{R_K}$$

由年金现值系数表 n = 4 栏查出，并用推值法计算得 $R_K = 6.138\%$

$$R_N = m[(1+R_K)^{\frac{1}{m\cdot k}} - 1] = 2[(1.06138)^{\frac{1}{4}} - 1]$$

$$= 3\%$$

习 题 二

一．已知：本金 100 元，存 4 年，年息率 12%。求下列各种情况下的本利和、利息和实际年利息率。

1. 一年复利一次
2. 每季复利一次
3. 每月复利一次
4. 二年复利一次
5. 连续复利

二．本利和 1800 元，本金 1200 元，年息率 1 分，每年复利 2 次。求存款年期。

三．有年息率 5 厘 5 的存款，每年复利一次，3 年后共得 9393.93 元。求本金。

四．本金 1366 元，存 4 年，每年复利一次，得 2000元，求年息率。

五．试问何种利率按每季复利一次，恰与年息六厘按半年复利一次相等。

六．现有票据票面 2000 元，时期二年，年息 6 厘，每年复利一次。今若按年息 7 厘，每年复利一次贴现，问兑现值是多少?

七．设于婴儿出生之日，即为之存款 1000 元，年息 1 分，每年复利 2 次，20 年后可得多少?

八．已知：每年发生本金 1000元，共 6 年，年息率 12%。求下列各种情况下的期初年金终值与期末年金终值。

1. 一年复利二次，一年发生一次本金；
2. 一年复利一次，一年发生 4 次本金 (即全年本金分 4 次付款)；

3. 一年复利四次，每年本金分8次付款;
4. 每季复利一次，每季付一次款;
5. 每二年付一次款，每年复利一次;
6. 每二年付一次款，每年复利四次;
7. 每年复利一次，付一次款;
8. 每年复利一次，年金连续发生;
9. 年金一年一次，复利连续进行;
10. 年金连续发生，复利连续进行。

九. 上题的各种条件，分别求期初年金现值和期末年金现值。并用现值和终值的关系检验。

十. 现有投资10000万元，如年息率8厘，欲5年收回投资，将下列各种情况下的每年期末收回额填入表中:

复利次数 / 收款次数	每年一次	每年二次	每年四次
每年一次			
每年二次			
每年四次			
每年52次			
连续发生			

十一. 上题，如果是终值14693.28万元，将各种情况下的每年期初年金发生额填入表中。

十二. 每年初存款500元，年息率1分，每年复利1次，几年后可得4700元。

十三. 某甲现借5000元，年息率5厘，每半年复利1次，现拟每年偿还1156.87元。几年可以还清。

十四. 每年初存500元，第五年初共得2800元，每年复利一

次，求利率。

十五. 现有债据二张。一张1250元，四个月后到期；一张九个月后到期，欠款2800元。若此时市场利率为6厘(月息率)，计算六个月一次偿还数。

十六. 现有票据三张。一张60日后到期面值1240元；一张90日后到期，面值1574元；一张120日后到期，面值750元。设利息率7厘(月息率)，试计算其一次偿还的平均付款日期。

十七. 向银行借款4万元，复利年息12厘，一年复利一次，分4年还清本利。如果这4次还款金额相等，问利息总额是多少。

十八. 某商品以分期付款方式出售订价8000元。前4个月每月付1000元，第5个月付清货款4000元交货。以月息10厘，求交货时的价格。

十九. 某君购房一套，议定先付2000元，以后每年付2000元，付至20000元为止，按年息率1分2厘。计算此房在议定时的价格和付清房款时的价格。

二十. 某银行拟创办教育储蓄，年利率一分，每年复利二次。自孩子初生起至十八岁止(计18年)每月初存款若干。自十九岁初起，每半年初取款2000元，以作大学一学期费用，至二十二岁止，共四年。试计算每月初应储之数额。

二十一. 中国人民银行决定从1991年4月21日起，适当调整降低我国国内存款利息率。各定期储蓄挡次的月息率见下表：

定期储蓄期限	3个月	6个月	1年	2年	3年	5年	8年
月利率(‰)	2.7	4.5	6.3	6.6	6.9	7.5	8.4

每挡次存期满后，取本息转入下一期，则单利计息就转化为复利计息。现有 1000 元欲存 40 年。试比较结息期分别为 1 年、2 年、3 年、5 年、8 年的本利和。

第三章　特殊年金

第一章和第二章讨论的年金及其计算的两个前提条件是：年金发生的间隔期（包括结算现值和终值与最初和最末年金的间隔）都相等；每期年金的发生量也相等。满足上述二个条件的年金称为一般年金。现实经济活动中，资金运动尤其是年金的发生和结算，变化繁杂。不能同时满足上述二个条件的年金，称为特殊年金。

第一节　延期年金

一、延期年金概述

年金没有连续发生，或年金发生的起讫时点与结算总额（现值或终值）的时点不一致的情况称延期年金或展延年金。大致分三种情况：

1. 先延 w 期，后发生 n 期年金；
2. 先发生 n 期年金，后延 w 期；
3. 年金发生的中间有间断 w 期。

可以借助现金流量图（如图 1-1 所示）来讨论延期年金。现金流量图是在时间坐标上用带箭头的垂直线段，形象地表示现金流发生的时间及现金流的大小和流向。图中横轴表示时间，0 点为所考察的经济活动的起始时刻。箭头向下，表示资金的流出，例如存款、贷出、投资等等，是负现金流量。箭头向上，表示资金的流入，例如提存、收债、投资收益等等，是正现金流量。图中的现金流用数字或字母加以标注。

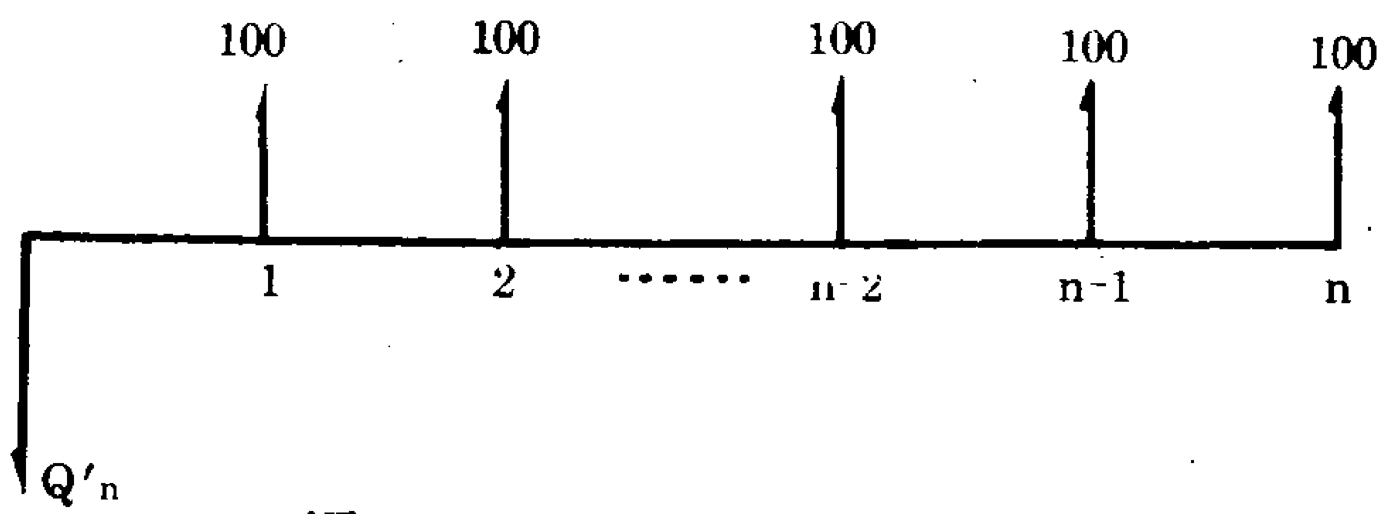
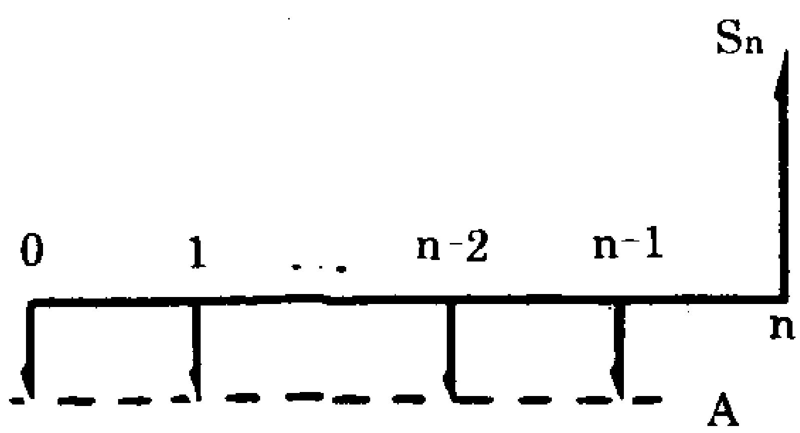
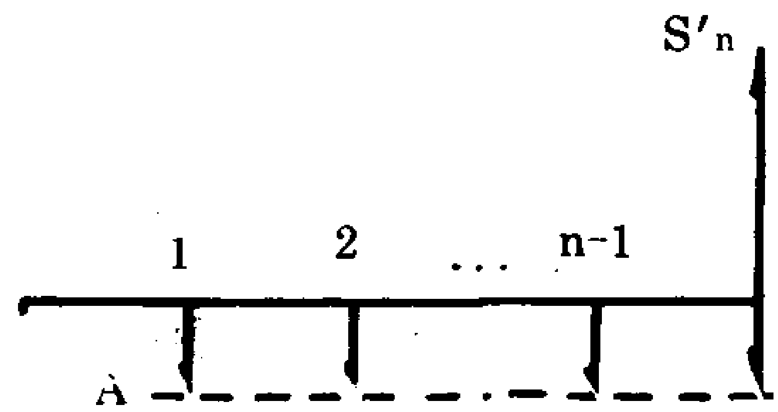


图 1-1　　现金流量图

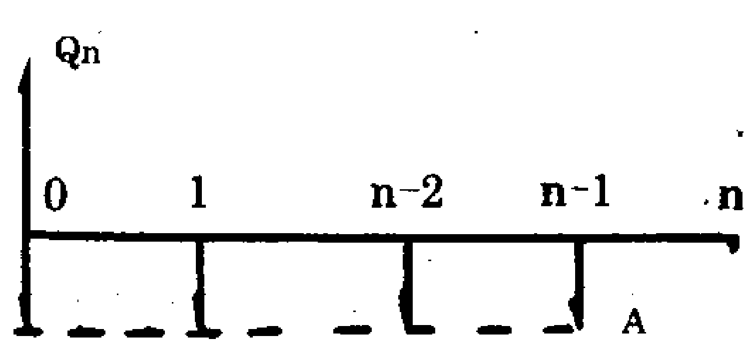
用现金流量图来表示前面讨论的各种年金问题，见图 1-2。



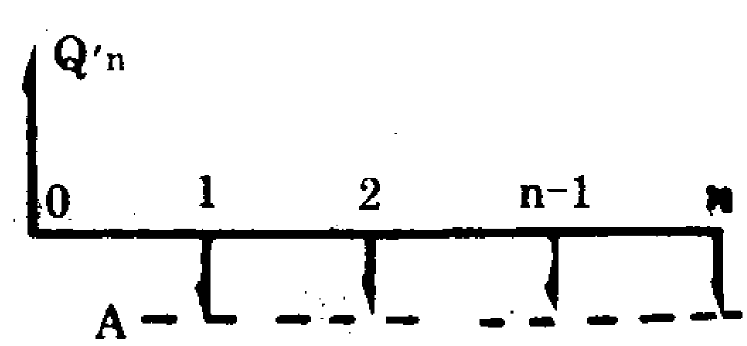
a．期初年金终值



b．期末年金终值



c．期初年金现值

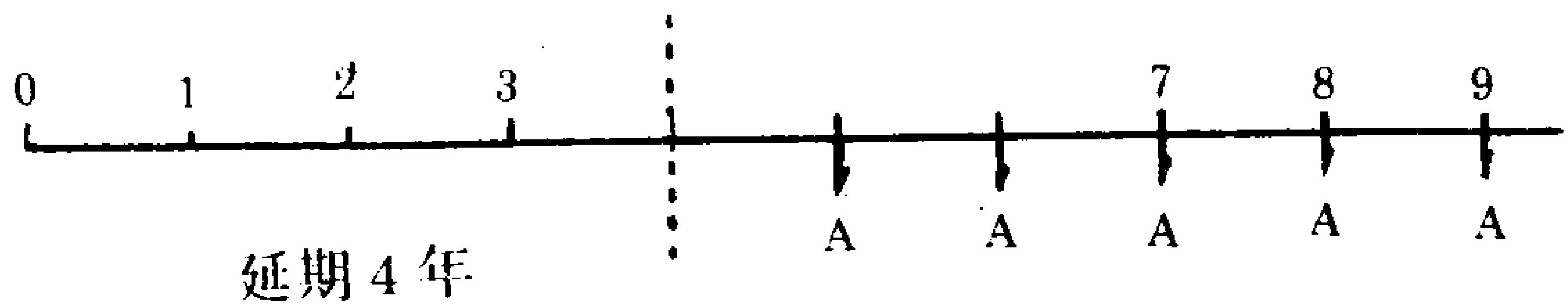


d．期末年金现值

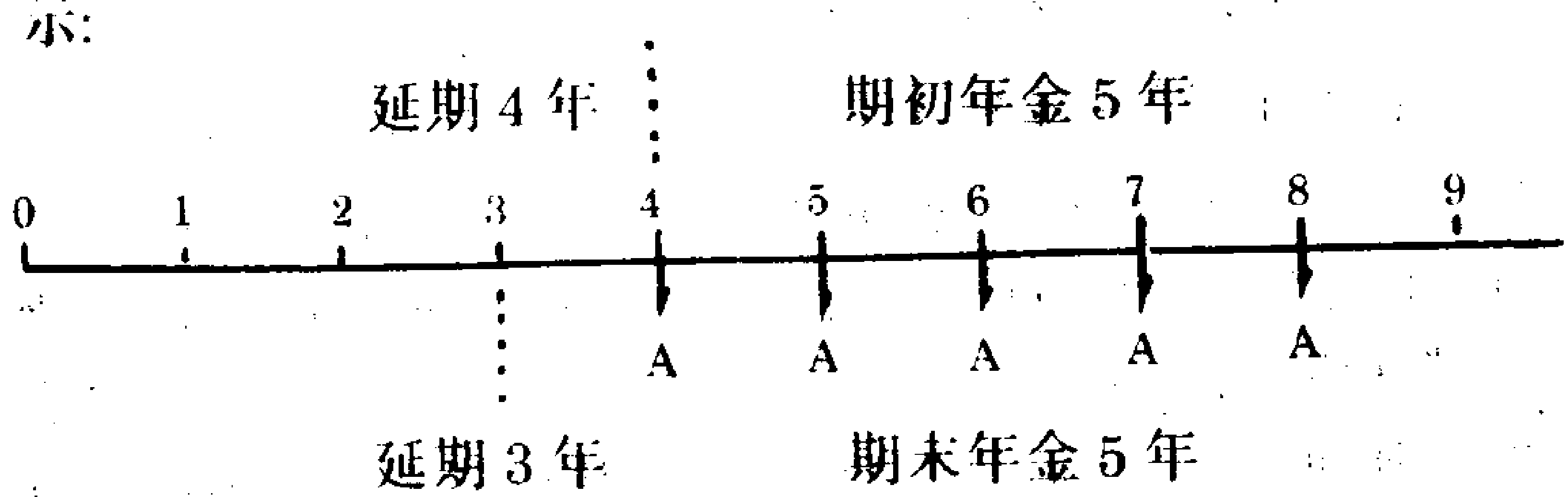
图 1-2　一般年金问题现金流量示意图

借助现金流量图，可以正确计点延期数和年金的期初或期末。例如 4 年后，每年发生期末年金 A，发生 5 次，可用下

图示意:　　　　　　　　期末年金 5 年



上图表示期末年金5年延期发生 4 年。即由第五年初开始算起，到第五年末才发生第一次年金，与期末年金第一年底发生相似。如若期初年金 5 年，延期发生 4 年，则如下图所示:



期初年金延期 4 年后，第一次发生在第五年初，而不象期末年金发生在第五年末。如从期末年金的角度考虑，上图也可以理解为期末年金延期 3 年后发生。所以先延期 w 期，再发生等额年金，期初年金延期 w 期，等于期末年金延期 w－1 期。延期年金有等额和不等额之分，本节讨论的是等额年金。

二、先延 w 期，后发生年金 n 期

假如在 T=0 时，发生一项投资 Q，经过 w 年后，每年年

末有收益 A，共收益 n 年，每年收益相等。讨论该投资的效益。研究一项投资最简单的方法是把收益额与投资额相比。上例可用下图表示：

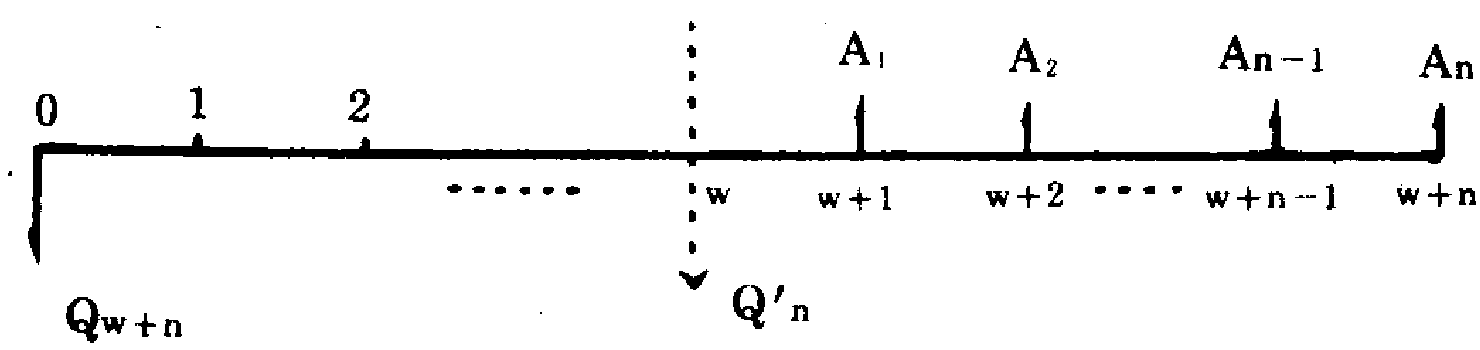


图 1-3　先延期 w 年，后发生年金 n 年示意图

比较 n 期年金的总和与投资 Q 的大小，有两个方法：(1) 将各期年金求到 $T=w+n$ 时的终值，Q 也求到 $w+n$ 时的终值再比较。(2) 对 n 期年金求其在 $T=0$ 时的现值 Q_{w+n}，再与投资 Q 作比较。第一个方法即求 S_n 和 $Q(1+R)^{w+n}$，已经讨论过。所以先延期再发生年金，一般是研究其现值。另外，假如 w 年后，每年初发生年金，前面已说明即如延期 $w-1$ 年后发生期末年金。故以期末年金为例来讨论。

1. 求现值 Q_{w+n}。

各期年金求到 T_0 时的现值分别是：

$$\frac{A}{(1+R)^{w+1}},\frac{A}{(1+R)^{w+2}},\cdots\cdots\frac{A}{(1+R)^{w+n-1}},\frac{A}{(1+R)^{w+n}}$$

这是一个公比为 $\frac{1}{1+R}$ 的等比数列，首项 $\frac{A}{(1+R)^{w+1}}$。

所以：

$$Q_{w+n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{(1+R)^{w+i}}=\frac{A}{(1+R)^{w+1}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+R}\right)^{n}}{1-\frac{1}{1+R}}$$

$$=\frac{A}{R}\left[1-(1+R)^{-n}\right](1+R)^{-w}=Q'_n(1+R)^{-w} \qquad (1\text{-}65)$$

公式 1-65 也可以这样来考虑，即 Q'_n 是 Q_{w+n} 经过 w 期后的终值。$Q_{w+n}(1+R)^{w}=Q'_n$，所以 $Q_{w+n}=Q'_n(1+R)^{-w}$。

如果每年复利次数与年金付款次数发生变化时，Q'_n 的求法仍同第二章第三节的阐述。要注意的是，$(1+R)^{-w}$ 要随着每年复利次数的变化而变化。列举如下：

(1) 每年复利 m 次，年金年末发生一次。

$$Q_{w+n}(m,1)=Q'_n(m,1)\cdot\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{-wm} \qquad (1\text{-}66)$$

(2) 每年复利一次，每年付款 l 次，每年年金总额 A。

$$Q_{w+n}(1,l)=Q'_n(1,l)\cdot(1+R)^{-w} \qquad (1\text{-}67)$$

(3) 每年复利 m 次，每年付款 l 次，每年年金总额 A。

$$Q_{w+n}(m,l)=Q'_n(m,l)\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{-wm} \qquad (1\text{-}68)$$

(4) 每年复利 m 次，每年付款 m 次，每年年金总额 A。

$$Q_{w+n}(m=l)=Q'_n(m=l)\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{-wm} \qquad (1\text{-}69)$$

(5) k 年付款一次，每年复利一次。

$$Q_{w+\frac{n}{k}}(1,k) = Q'_{\frac{n}{k}}(1,k)(1+R)^{w} \qquad (1\text{-}70)$$

(6) k 年付款一次，每年复利 m 次。

$$Q_{w+\frac{n}{k}}(m,k) = Q'_{\frac{n}{k}}(m,k)(1+\frac{R_N}{m})^{w\cdot m} \qquad (1\text{-}71)$$

[例 67] 每年付 100 元，为期 6 年。第一次付款是今日后的第五年底，年息率 1 分，每年复利二次，求现值。

解：从期末年金角度考虑，先延期了 4 年，w=4；从期初年金角度考虑，先延期了 5 年。计算公式相同：

$$Q_{w+n}(m,1) = \frac{A\left[1-(1+\frac{R_N}{m})^{mn}\right]}{(1+\frac{R_N}{m})^{m}-1} \cdot (1+\frac{R_N}{m})^{w\cdot m}$$

$$= \frac{100\left[1-(1.05)^{12}\right](1.05)^{8}}{(1.05)^{2}-1} = 292.63 \text{ 元}$$

2. 求年金

求年金的最简捷的方法，是先求期末年金额，再除以 $(1+R)^{-w}$ 或相应之式。从公式 1-65 得：

$$A = \frac{Q_{w+n}}{(1+R)^{w}} \cdot \frac{R}{\left[1-(1+R)^{n}\right]} = \frac{Q_{w+n}\cdot(1+R)^{w}\cdot R}{\left[1-(1+R)^{n}\right]}$$

就是已知现值 $Q_{w+n}\cdot(1+R)^{w}$，求年金。

[例 68] 现存 3178 元，以备孩子中学费用。年利率 9 厘，每年复利一次，先存 4 年。自第五年起，拟分 6 年平均取

用，求在每年底可取之数额。

$$\text{解: } A=\frac{3178\times(1+0.09)^{4}\times0.09}{[1-(1+0.09)^{-6}]}=1000\text{元}$$

3．求时期。

有二个时期：延期的 w 和发生年金的 n 期。

若已知 Q_{w+n} 和 w，则用 $Q'_{n}=Q_{w+n}(1+R)^{w}$ 来求 n。同年金时期的求法。

若已知 A 和 n，则用 $Q'_{n}=\frac{A}{R}[1-(1+R)^{-n}]$ 得到 Q'_{n} 后，再求 w。

$$w=\frac{lg\,Q'_{n}-lg\,Q_{w+n}}{lg\,(1+R)}$$

同一次本金的时期的求法。

4．求利率。

延期年金求利率，尚无完善的方法。只有用假定之利率代入 Q_{w+n} 公式，以作试验。经过几次试验后，再用推值法可求出正确的结果。

［例 69］　现存 4176 元，延期四年后，每年底取 1000 元，可取 6 次，每年复利一次，求年利率。

$$\text{解:}\quad Q_{w+n}=\frac{A}{R}[1-(1+R)^{-n}](1+R)^{-w}$$

$$4176=\frac{1000}{R}[1-(1+R)^{-6}](1+R)^{-4}$$

$$4.176=R[1-(1+R)^{-6}](1+R)^{-4}$$

假定 R＝0.06，代入上式右端，得：3.89498，说明 R 太

高。

假定 R=0.04，代入上式右端，得：4.481，　　说明 R 太低。

$\therefore \quad 0.06>R>0.04$

利率提高 0.02，　　　年金现值减少 0.58602，则：

$$R = 0.04+\frac{4.176-4.481}{3.89498-4.481}\times 0.02$$

$$= 0.04+0.52\times 0.02=0.05$$

三、先发生年金 n 期，后延 w 期

大型工程的投资不是一次完成的。假如在 n 年内每年末等额投资 A，全部投资后经过 w 年才开始有收益，问收益总额多少才能收回投资。

可用下图示意：

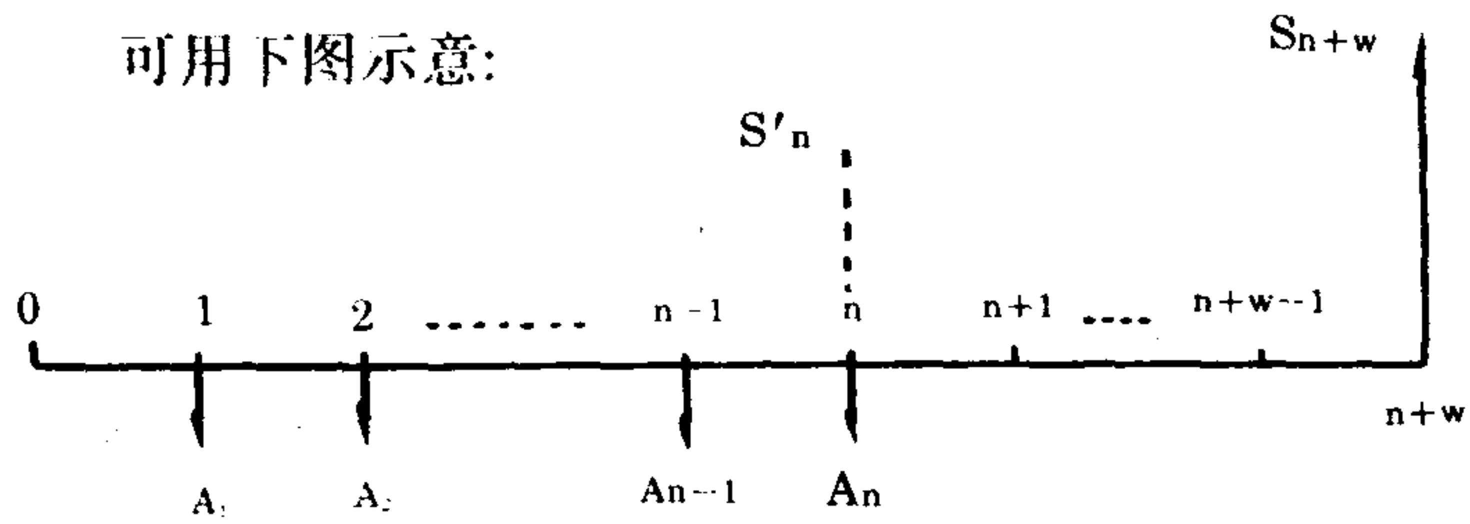


图 1-4　先发生年金 n 年后延期 w 年示意图

从上图可以明显地看出，如果发生的是期初年金，则等于同期数的期末年金延期 w-1 年。所以仍以期末年金为例来讨论。对上列问题，讨论其现值，与普通年金现值一样。故主要讨论其终值。

1．求终值。

各期年金到 n+w 期末的终值分别是 $A(1+R)^{n+w-1}$，$A(1+R)^{n+w-2}$，……，$A(1+R)^{w}$。这是一个公比为 $(1+R)$ 的

等比数列，首项 $A(1+R)^w$，共 n 项。所以

$$S_{n+w} = \sum_{t=1}^{n} A(1+R)^{n+w-t} = \frac{A}{R}[(1+R)^n-1](1+R)^w$$

$$= S'_n \cdot (1+R)^w \qquad (1\text{-}72)$$

公式 1-72 说明，S_{n+w} 是 S'_n 经过 w 期后的终值。

如果每年复利次数与年金付款次数发生变化时，S'_n 的变化仍同第二章第二节的求法。要注意的是，$(1+R)^w$ 要随着每年复利次数的变化而变化。

2．求年金和时期。

以 S'_n 为中介，与前面先延期后发生年金时以 Q'_n 为中介的思考方法相同，可以分别求得年金 A，年金发生期 n 或延期 w。

3．求利率。

先发生年金后延期求利率，也尚无完善的方法。用假定利息率代入 S_{n+w} 公式，作试验，再用推值法求得正确的结果。

四、年金发生的中间有间断 w 期

有资金流向不同和相同两种情况。资金流向不同，如投资 n 期每期 A 后，经过 w 年开始有收益，每年收益 B。见下图：

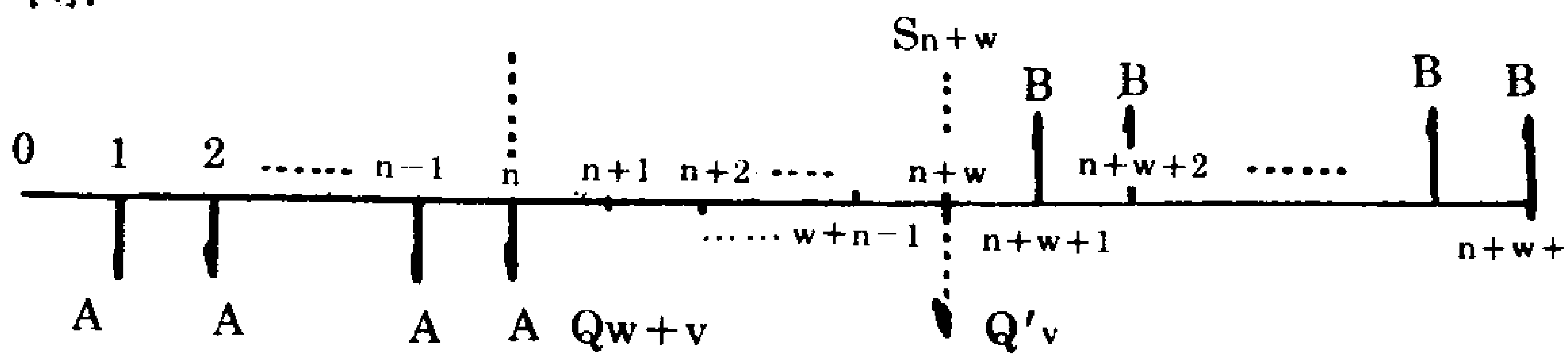
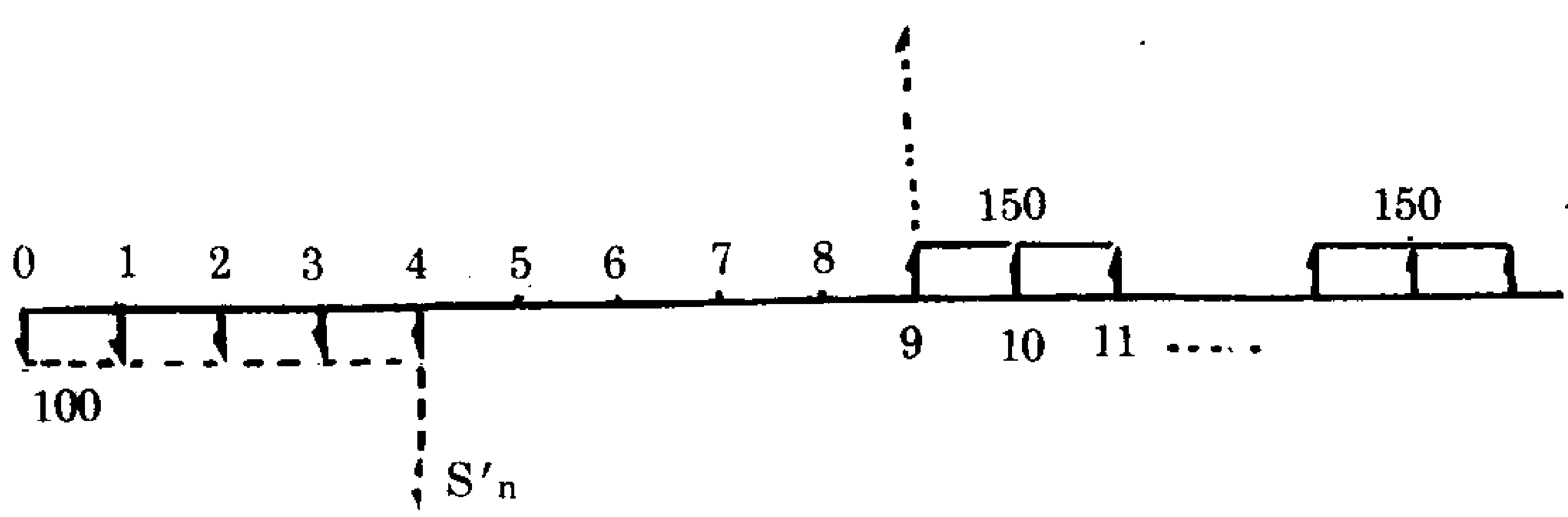


图 1-5 年金发生的中间间断 w 期示意图

资金流向相同，如投资 n 期中断 w 期再投资 v 期，或收益 n 期中断 w 期再收益 v 期。年金 A 与年金 B 可以相等，也可以不相等。不管那种情况，如图 1-5 所示，实质上是前两种延期年金的综合。注意两个中介时点上的 S'_n 和 Q'_v，及其与 S_{n+w} 和 Q_{w+v} 的关系，再借助现金流量图分析资金流向，就可以解各种实际问题了。

［例 70］ 某项工程每年投资 100 万元，连续 5 年。与第五次投资相隔 5 年后，开始有收益，每年收益 150 万元，收益均匀发生，年息率 12%，每年复利二次。问：收益多少年可以收回投资。

解：可用下图来分析该题： $\overline{Q}_x = S_{n+w}$



最后一次投资后 5 年有收益，如 5 次投资是期初年金，则延期 4 年。如果认为延期 5 年，5 次投资应认为是期末年金，w=5。

本题的资金时间价值分二段考虑。计算前先求 R_E，以使以后的计算简化。

$$R_E = (1+\frac{R_N}{m})^m - 1 = (1+\frac{0.12}{2})^2 - 1 = 0.1236$$

$$S'_n = \frac{100}{0.1236}[(1+0.1236)^5 - 1] = 639.8444 \text{ 万元}$$

$S_{n+w} = S'_n \cdot (1+R_E)^w = 1145.8639$ 万元，即是开始有收益

时的总投资。设 X 年收回投资，$\overline{Q}_x = S_{n+w}$

$$\overline{Q}_x = \frac{A[1-(1+R_E)^{-x}]}{ln(1+R_E)}$$

$$X = \frac{ln\dfrac{A}{100-\overline{Q}_x ln(1+R_E)}}{ln(1+R_E)}$$

$$= \frac{ln\dfrac{150}{150-1145.8639 ln(1.1236)}}{ln(1.1236)}$$

$$= 18.96 \approx 19 \text{ 年}$$

即：投产收益 19 年可以收回投资。

第二节 变额年金

一、变额年金的概述

以前所讨论的年金，每期发生额都是相同的可称为等额年金。每期发生的年金额不全相等的称之为变额年金。不全相等的含义，指有一个不等或全不相等。例如

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	……
(1)	3	4	5	6	7	……
(2)	2	4	8	16	32	……
(3)	3.5	3.5	6.	4	3.5	……
(4)	1.	4.5	12	3	7	……

变额年金中，Aj 不是常量，而是随 j 而变化的变量。变额年金可以分类为：

1. 等差变额年金，例如上例的第一种情况；

2. 等比变额年金，例如上例的第二种情况；

3. 不规则变额年金，例如上例的第三、第四种情况。

变额年金一般是求解其总额，即现值和终值。求解时，要注意期初发生和期末发生的区别。借助现金流量图，标明流向，确定发生时期和发生量，有利于解题的简便，避免差错。

二、不规则变额年金

对于不规则变额年金求终值或现值，只能根据已知分别求各期年金的终值或现值，然后再加总。即：

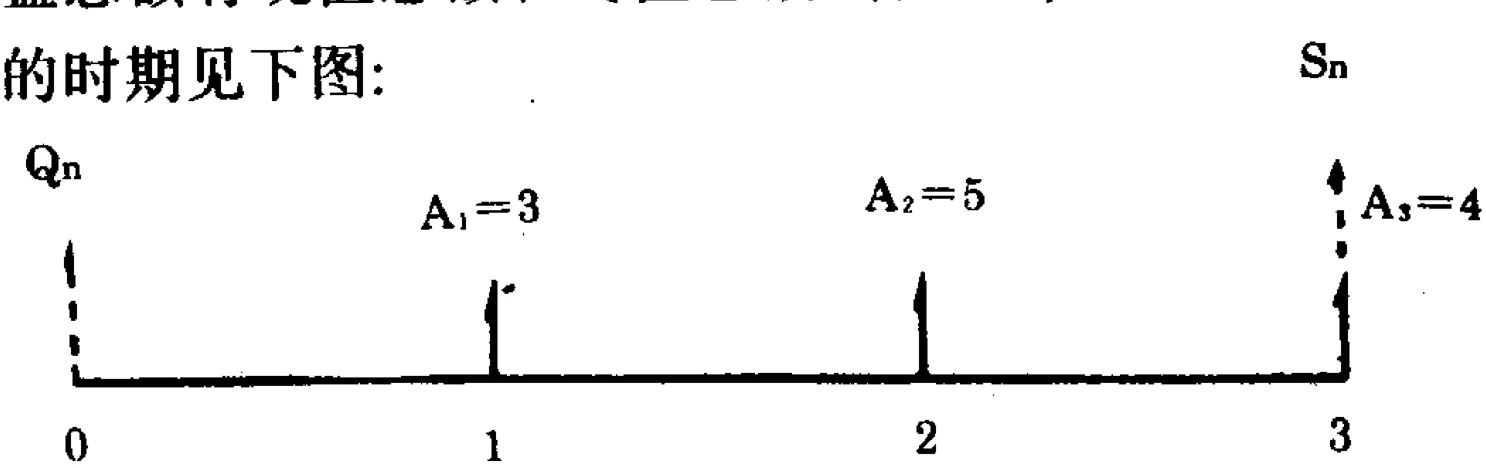
$$S_n = \Sigma A_j\,(1+iR)\ ; \qquad Q_n = \Sigma\frac{A_j}{1+iR}\ ;$$

或：$$S_n = \Sigma A_j\,(1+R)^i\ ; \qquad Q_n = \Sigma A_j(1+R)^{-i}\ ;$$

$$S_n = \Sigma A_j \cdot e^{i \cdot R}\ ; \qquad Q_n = \Sigma A_j \cdot e^{-i \cdot R}\ 。$$

［例 71］ 预计三年内，收益分别是 3 万元、5 万元、4 万元，年息率 1 分。分单利、年复利一次和连续复利三种情况，求收益总额。

解：年收益一般是期末发生。$A_1 = 3$，$A_2 = 5$，$A_3 = 4$。收益总额有现值总额和终值总额。各期 A_j 到期初或第三年末的时期见下图：



1. 单利：$S_n = 3\,(1+2\times 0.1)+5\,(1+1\times 0.1)$

$$+4\ (1\times0\times0.1) = 13.1\ 万元$$

$$Q_n = \frac{3}{1+1\times0.1} + \frac{5}{1+2\times0.1}$$

$$+\frac{4}{1+3\times0.1} = 9.97\ 万元$$

2．复利：$S_n = 3\ (1+0.1)^2 + 5\ (1+0.1)$

$$+4\ (1+0.1)^0 = 13.13\ 万元$$

$$Q_n = 3\ (1+0.1)^{1} + 5\ (1+0.1)^{2}$$

$$+4\ (1+0.1)^{3} = 9.86\ 万元$$

3．连续复利：$S_n = 3\cdot e^{2\times0.1} + 5\cdot e$

$$+4\cdot e^{0\times0.1} = 13.19\ 万元$$

$$Q_n = 3\cdot e^{1\times0.1} + 5\cdot e^{2\times0.1}$$

$$+4\cdot e^{3\times0.1} = 9.77\ 万元$$

三、等比年金

年金 A_j 本身成等比数列，称等比变额年金，简称等比年金。设等比年金的公比为 q，年金期末发生，则各期年金及其终值和现值见下表：

期　数	1	2	……	n－1	n
每期末发生等比年金，公比 q	A	Aq	……	Aq^{n-2}	Aq^{n-1}
n 期末终值	$A(1+R)^{n-1}$	$Aq(1+R)^{n-2}$	……	$Aq^{n-2}(1+R)$	Aq^{n-1}
现　值	$\frac{A}{1+R}$	$\frac{Aq}{(1+R)^2}$	……	$\frac{Aq^{n-2}}{(1+R)^{n-1}}$	$\frac{Aq^{n-1}}{(1+R)^n}$

n 期末的年金终值仍是等比数列，公比 $\frac{1+R}{q}$，首项 Aq^{n-1}。

$$S'_n(q)=\sum_{i=0}^{n-1}A(1+R)^i q^{n-1-i}=Aq^{n-1}+Aq^{n-2}(1+R)+\cdots\cdots+A(1+R)^{n-1}$$

$$=Aq^{n-1}\frac{\left(\frac{1+R}{q}\right)^n-1}{\frac{1+R}{q}-1}=Aq^n\frac{(1+R)^n q^{-n}-1}{1+R-q} \tag{1-73}$$

n 期的期末年金现值也是等比数列，公比 $\frac{q}{1+R}$，首项 $\frac{A}{1+R}$。

$$Q'_n(q)=\sum_{i=1}^{n}\frac{Aq^{i-1}}{(1+R)^i}=\frac{A}{1+R}+\frac{Aq}{(1+R)^2}+\cdots\cdots+\frac{Aq^{n-2}}{(1+R)^{n-1}}+\frac{Aq^{n-1}}{(1+R)^n}$$

$$=\frac{A}{1+R}\cdot\frac{\left(\frac{q}{1+R}\right)^n-1}{\frac{q}{1+R}-1}=\frac{A}{q-(1+R)}\cdot\left[\left(\frac{q}{1+R}\right)^n-1\right] \tag{1-74}$$

如果年金期初发生，则上面的表格中，年金栏不变，S_n 和 Q_n 等比数列的公比也不变，唯一改变的是各自的首项。S_n 的首项是 $Aq^{n-1}(1+R)$，Q_n 的首项是 A。则：

$$S_n(q)=\sum_{i=1}^{n}A(1+R)^i q^{n-i}=Aq^{n-1}\cdot(1+R)\frac{\left(\frac{1+R}{q}\right)^n-1}{\frac{1+R}{q}-1}$$

$$=S'_n(q)(1+R) \tag{1-75}$$

$$Q(q)=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{Aq^t}{(1+R)^t}=A\cdot\frac{\left(\frac{q}{1+R}\right)^n-1}{\frac{q}{1+R}-1}=Q'_n(q)\cdot(1+R) \qquad (1\text{-}76)$$

［例 72］ 第一年初投资 50 万元，第二、第三年每年投资递减 20%，以年息率 1 分，每年复利一次。求三年投资总额。

解：$q=1-0.2=0.8$

三年投资总额有现值和终值：

$$Q_n(q)=\frac{A(1+R)}{q-(1+R)}\cdot\left[\left(\frac{q}{1+R}\right)^n-1\right]$$

$$=\frac{A\times1.1}{0.8-1.1}\cdot\left[\left(\frac{0.8}{1.1}\right)^3-1\right]=112.81\ \text{万元}$$

$$S_n(q)=Aq^n(1+R)\frac{\left(\frac{1+R}{q}\right)^n-1}{1+R-q}$$

$$=A(0.8)^3(1.1)\frac{\left(\frac{1.1}{0.8}\right)^3-1}{0.3}=150.15\ \text{万元}$$

本例中，由于年金发生次数不多，可以不必套用公式而直接求解：

$$Q_n(q)=50+\frac{50\times0.8}{1.1}+\frac{50\times(0.8)^2}{(1.1)^2}=50+36.36+26.45$$

$$=112.81\ \text{万元}$$

$$S_n(q)=50\times(1.1)^3+50\times0.8\times(1.1)^2+50\times(0.8)^2\times1.1$$

$$=66.55+48.4+35.2=150.15\ \text{万元}$$

当 n 较大时，还是用公式求解方便。

[例 73] 投资建设一矿井，预计第一年收益 20 万元，由于产量递减使收益每年递减 5%，由于价格上升影响收益每年递增 3%。年息率 1 分，每年复利一次。矿井用 10 年，投资 100 万元。求净收益的现值。

解: $q=(1-0.05)(1+0.03)=0.9785$

$$Q'_n(q)=\frac{A}{1+R-q}\cdot\left[1-\left(\frac{q}{1+R}\right)^n\right]=\frac{20}{1.1-0.9785}\left[1-\left(\frac{0.9785}{1.1}\right)^{10}\right]$$

$$=113.54\text{ 万元}$$

净收益: $113.54-100=13.54$ 万元

四、等差年金

年金 A_j 本身成等差数列，称等差变额年金，简称等差年金。设等差年金的公差比为 d，年金期末发生，则各期年金及其现值见下表:

期　数	1	2	……	$n-1$	n
每期末发生等差年金，公差 d	A	$A+d$	……	$A+(n-2)d$	$A+(n-1)d$
现　值	$\frac{A}{1+R}$	$\frac{A+d}{(1+R)^2}$	……	$\frac{A+(n-2)d}{(1+R)^{n-1}}$	$\frac{A+(n-1)d}{(1+R)^n}$

$$Q'_n=\frac{A}{1+R}+\frac{A+d}{(1+R)^2}+\cdots\cdots+\frac{A+(n-2)d}{(1+R)^{n-1}}+\frac{A+(n-1)d}{(1+R)^n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{A+(i-1)d}{(1+R)^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{(1+R)^i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)d}{(1+R)^i}=Q'_n+\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)d}{(1+R)^i}$$

设 $\frac{1}{(1+R)} = u$，$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)d}{(1+R)^i} = Q_{II}$

$$Q_{II} = o + du^2 + 2du^3 + 3du^4 + \cdots\cdots + (n-2)du^{n-1} + (n-1)du^n$$

$$uQ_{II} = \quad du^3 + 2du^4 + 3du^5 + \cdots\cdots + (n-2)du^n + (n-1)du^{n+1}$$

$$Q_{II} - uQ_{II} = du^2 + du^3 + du^4 + \cdots\cdots + du^n - (n-1)du^{n+1}$$

$$(1-u)Q_{II} = du^2 \frac{1-u^{n-1}}{1-u} - (n-1)du^{n+1}$$

$$Q_{II} = du^2 \cdot \frac{1-u^{n-1}}{(1-u)^2} - \frac{(n-1)du^{n+1}}{1-u} \qquad (\because 1-u = 1-\frac{1}{1+R} = \frac{R}{1+R})$$

$$= du^2 \cdot \frac{1-u^{n-1}}{(Ru)^2} - \frac{(n-1)du^{n+1}}{Ru} = dR^{-2}(1-u^{n-1}) - dR^{-1}(n-1)u^n$$

$$= dR^{-2}[1-(1+R)^{1-n}] - dR^{-1}(n-1)(1+R)^{-n}$$

$$Q'_n(d) = Q'_n + Q_{II}$$

$$= AR^{-1}[1-(1+R)^{-n}] + dR^{-2}[1-(1+R)^{1-n}] - dR^{-1}(n-1)(1+R)^{-n}$$

$$= \frac{AR}{R^2}[1-\frac{1}{(1+R)^n}] + \frac{d}{R^2}[1-\frac{(1+R)}{(1+R)^n}] - \frac{dR(n-1)}{R^2(1+R)^n}$$

$$\therefore Q'_n(d) = \frac{AR+d}{R^2} - \frac{AR+d+ndR}{R^2(1+R)^n} \qquad (1\text{-}77)$$

［例 74］ 一架飞机现价 3,500 万元。预计第一年收益 1000 万元。以后由于维修成本逐年递增，使收益递减 100 万元。使用 8 年退役，假定残值不计。试以年息 5 厘计算净收益的现值。

解：这 8 年的收益现值是：

$$Q'_n(d)=\frac{1000}{1.05}+\frac{900}{(1.05)^2}+\frac{800}{(1.05)^3}+\cdots\cdots+\frac{300}{(1.05)^8}=4366.22\text{ 万元}$$

或者用公式 1-77 解

$$A=1000,\ d=100,\ R=0.5,\ n=8$$

$$Q'_n(d)=\frac{AR+d}{R^2}-\frac{AR+d+ndR}{R^2(1+R)^n}$$

$$=\frac{1000\times0.05-100}{(0.05)^2}-\frac{1000\times0.05-100-8\times100\times0.05}{(0.05)^2(1.05)^8}$$

$$=-20000+24366.22=4366.22\text{ 万元}$$

净收益: $4366.22-3500=866.22$ 万元

第三节　永久年金

已经讨论过的各种年金问题中，n 都是有限次，即年金发生的期数是确定的。当年金的期数永远发生，即 n 趋向无穷大时，称为永久年金。永久年金的终值是发散的 (无穷大没有极限)，永久年金的现值是收敛的 (有极限)，所以永久年金讨论的是现值。

一、期末的永久年金现值 (Q'_∞)

从期末年金现值公式:

$$Q'_n=\frac{A}{R}\left[1-\frac{1}{(1+R)^n}\right]\quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时,}$$

$$Q'_\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{A}{R}\left[1-\frac{1}{(1+R)^n}\right]$$

$$=\frac{A}{R}\left[1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+R)^n}\right]=\frac{A}{R}[1-0]$$

$$\therefore\ Q'_\infty=\frac{A}{R} \tag{1-78}$$

有些永久性的奖金，就是永久年金。即设立一笔基金 Q'_∞，每期末提取年金 $A = Q'_\infty R$ 作为奖金。年金可以永远取得，实际上是每期只提取利息 $Q'R$，而基金 Q'_∞ 永远保持下去。

［例 75］ 建立甲种永久性的奖金，每年末发放一次，总额一万元，年息率 1 分，问奖金的基金应是多少?

解: $Q'_\infty = \dfrac{A}{R} = \dfrac{10000}{0.1} = 100000$ 元

当 A 确定以后，Q'_∞ 是 $Q'_n = \dfrac{A}{R}\left[1-\dfrac{1}{(1+R)^n}\right]$ 的极大值。反之，$A = Q'_n R\dfrac{(1+R)^n}{(1+R)^n-1}$。当 $n\to\infty$ 时，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+R)^n}{(1+R)^n-1}=1$，$A = Q'_\infty R$，当 Q'_∞ 确定后，A 是 $Q'_n R\dfrac{(1+R)^n}{(1+R)^n-1}$ 的极小值。所以，每年提取的年金随 R 的变化而变化。当提取的 $A = Q'_\infty R$ 时，不影响 Q'_∞ 的值，即

Q'_∞ 不减少，下一年提取年金时，仍以 Q'_∞ 为准。

二、期初永久年金现值 (Q_∞)

从期初年金现值公式

$$Q_n = \frac{A(1+R)}{R}\left[1-\frac{1}{(1+R)^n}\right] \quad 当\ n\to\infty,$$

$$Q_\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{A(1+R)}{R}\left[1-\frac{1}{(1+R)^n}\right] = \frac{A(1+R)}{R} = \frac{A}{R}+A$$

$$= Q'_\infty + A \tag{1-79}$$

公式 1-79 很明确地说明，基金 Q_∞ 刚设立，就要提取永久年金 A，剩下的正好是经过一期的 Q'_∞。所以在考虑永久年金时，一般都是期末永久年金。

三、提取次数变化时的期末永久年金现值

有时，支付永久年金的时期或次数有变化，或一年提取 l 次，或 k 年提取一次，假定年复利次数都为一次。

1. 一年提取 l 次，全年永久年金 A。

$$Q'_n(1,l) = \lim_{n\to\infty}\frac{A[1-(1+R)^{-n}]}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]} = \frac{A}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]} \tag{1-80}$$

[例 76] 建立乙种永久性奖金，每半年发放一次，每次 5 千元，年息率 1 分，每年复利一次。问：奖金的基金应是多少？

$$解: Q'(1, l) = \frac{A}{l[(1+R)^{\frac{1}{l}}-1]} = \frac{10000}{2[(1.1)^{\frac{1}{2}}-1]} = 102440 元$$

2、k 年提取一次，每次永久年金 A_k。

$$Q'(1, k) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_k[1-(1+R)^{-n}]}{(1+R)^k-1} = \frac{A_k}{(1+R)^k-1} \tag{1-81}$$

［例 77］ 建立丙种永久性奖金，每二年发放一次，每次 2 万元，年息率 1 分，每年复利一次。问：奖金的基金是多少？

$$解: \quad Q'(1, k) = \frac{A_k}{(1+R)^k-1} = \frac{20000}{(1+0.1)^2-1} = 95238.1 元$$

假如每年的复利次数有变化，例如每年复利 m 次，则可以先求每年的实际 R_E，后再套用有关的永久年金公式。或对各种情况的期末年金现值，求 n 趋于无穷大时的极值，直接求得各种情况的期末永久年金现值。

习 题 三

一、一个投资项目，开始三年中每年初投资5万元，后三年每年末投资3万元。试以年息6厘的利率计算该项投资在第10年末的终值。

二、1990年投资建厂，预计1993年投产。如果自1993年起每年末收益20万元，试以年息率1分计算10年收益在1990年初的现值。

三、某银行拟为学童举办教育储金，规定年息率1分，每半年复利一次。自16岁起至18岁止每半年取500元，以作高中学资。求学童出生时应存之数额。

四、投资5万元，第1年收益1万元，以后每年收益递增10%。试以年息率5厘计算，5年间收回投资后的净收益的现值。

五、投资80万元建设某项目，5年后投产获利。第一年可获利15万元，以后每年递增10%，年利率12厘，每年复利一次，问几年可收回投资。

六、设第一年底存200元，第二年底存300元，以后每年增加100元，共计5年，年利息率1分，每年复利一次，求年金现值和终值。

七、设置一项永久性奖金，每年发奖一次。设一等奖一名，给奖1000元；二等奖五名，给奖各200元；三等奖十名，给奖各100元。按银行存款复利年率1分，每年复利两次，应筹集多少基金？

八、某人欲建立一项奖学金，准备在10年后启用。筹措基金时，第一年1万元，以后每年递增10%，共五年，年息率1分。在筹集基金的10年中，每年复利一次，求下列情况每次可发的奖金数

复利次数 / 发放奖金时间	每年一次	每半年一次	每季度一次
每学年一次			
每学期一次			
每半学期一次			

第四章　资金时间价值的应用

第一节　投资方案经济效果评价

投资方案的经济效果，指投资方案所需投资与可获收益之间的比较。在投资时，为了达到一定的目的，往往可以采取多种不同的技术方案。在特定的经济技术条件下，不同的技术方案所需要的各种资源的投入和所带来的有效成果是不同的。这些投入的资源和获得的成果，可以用货币来计量。所以，从经济角度来看，技术方案可以归结为投资方案，即以一定的资金投入获取相应的经济收益。

在对不同的投资方案作选择时，往往要考虑各方面的因素，其中经济效果是最主要的因素。如果其他方面的条件大致相同，对于多种备选方案，应该选择经济效果较高的方案。经过长期的实践与研究，人们提出多种投资方案经济效果的评价方法，这些方法分别适用于各种不同的方案评价问题。而各种评价方法都离不开资金的时间价值。下面介绍几种主要的评价方法。

一、现值法

现值法是把投资方案在计算期内的现金流出与流入通过资金的等值计算，全部折算成现值，并根据累计的收益与费用现值的大小来评价方案的经济效果。现值法常用的评价指标有净现值、净现值率和费用现值。

1．净现值(Net Present Value，简记为 NPV)。

净现值指整个方案计算期内累计的净现金流量现值，即是整个方案的总收入现值与总支出现值之差。某项目投资建成后获得收益时，每年的现金流出包括投资、经营成本及税

金等;现金流入包括销售收入与设备残值回收等。将每年的现金流入减去现金流出,得到每年的净现金流量。此流量可正可负。将投资方案使用年限内每年的净现金流量都折算到投资时的现值,并加总,即得到投资方案的净现值:

$$\mathrm{NPV} = \sum_{i=0}^{n} (B_i - C_i - K_i) \frac{1}{(1+R)^i} \tag{1-82}$$

式中: B_i — 第 i 年的经营收入;

C_i — 第 i 年的经营成本;

K_i — 第 i 年的投资支出。

如果方案的净现值大于零,则说明该方案能够取得满意的经济效果。在若干备选方案中,净现值最大的方案,其经济效果最佳。

[例 78] 某航空公司拟新购一架飞机,投资 5 千万元,当年可投入航班运行。第一年运输收入 2400 万元,经营成本 1500 万元。以后每年收入可达 4800 万元,年经营成本需 3000 万元。税金为收入的 10%。使用寿命 10 年,期末飞机残值 500 万元。年息率 1 分 2 厘。计算该方案的净现值,并判断该方案经济可行性。

解: 第一年初的净现金流量为: -5000 万元。

第一年底的净现金流量为:

$2400-2400\times0.1-1500=660$ 万元

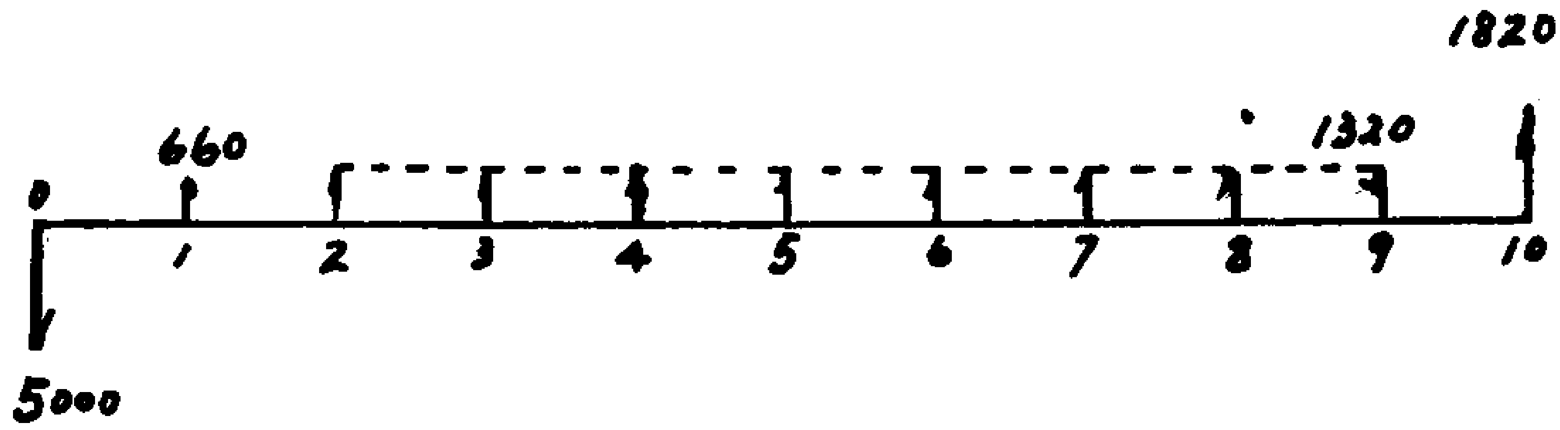
第二至第九年的净现金流量为:

$4800-4800\times0.1-3000=1320$ 万元

第十年的净现金流量为:

$4800-4800\times0.1-3000+500=1820$ 万元

该方案的现金流量图如下:



$$NPV = -5000+660(1+0.12)^{-1}$$

$$+1320\frac{1-(1+0.12)^{-8}}{0.12}(1+0.12)^{-1}+1820(1+0.12)^{-10}$$

$$= -5000+7030=2030\text{(万元)}$$

NPV ＞ 0，所以该方案经济上是可行的。

通常，计算净现值的基准时点选在初始投资年份的年初（也可称为零年末）。在其他条件不变的情况下，如果改变基准时点，净现值的大小会发生变化，但正负号不会变，因此评价结论不会改变。

净现值指标用于多方案选择时，一般要求各方案计算期一致，然后才能比较各方案的优劣。

2．净现值率（简记为 NPVR）。

净现值指标用于多方案比较时，若各方案计算期一致，则净现值最大的方案为最优方案。不考虑投资额的大小。这里隐含着各方案投资额相等的假定。如果投资额不等，在评价中就必须考虑单位投资的利用效率。通常用净现值率来反映单位投资的利用效率。

净现值率是投资方案的净现值与总投资现值之比，表示单位投资现值所能带来的净现值。公式为：

$$\mathrm{NPVR} = \frac{\mathrm{NPV}}{\sum_{i=0}^{n} K_i (1+R)^{i}} \tag{1-83}$$

显然，净现值率大的方案比较好。在例 78 中，投资只发生一次：

$$\sum_{i=0}^{n} K_i (1+R)^{i} = 5000 \text{ 万元}$$

$$\mathrm{NPVR} = 2030 \div 5000 = 0.406$$

3. 费用现值 (Present Value Cost，简记为 PVC)。

用净现值指标评价投资方案的经济效果，要求用货币单位计算项目的收益，如销售收入额、成本节约额等等。但是有些项目的收益难以用货币直接计算，如安全保障、环境保护、劳动条件改善等等。对于这类项目，若各备选方案能够满足相同的需要，则只需比较它们的投资与经营费用。

另外，对于可以用货币计算收益的项目，如果各备选方案逐年收益相等，也可略去对收益的计算，而按总费用最小的原则进行方案比较选择。

费用现值指标主要用于上述两类项目的评选。其计算公式为：

$$\mathrm{PVC} = \sum_{i=0}^{n} (K_i + C_i)(1+R)^{i} \tag{1-84}$$

［例 79］ 有四种侯机大楼空调方案，各方案的投资与经营费用见下表。设使用寿命为 15 年，年息率 8 厘，求最优方案。

方　案	一	二	三	四
投　资（元）	180000	254500	334000	436000
年经营费用（元）	90000	59000	45000	36000

解：$\mathrm{PVC}_1 = 180000 + 90000 \times \frac{1-(1+0.08)^{15}}{0.08} = 950353$ 元

$$PVC_2 = 254500+59000\times\frac{1-(1+0.08)^{15}}{0.08} = 759509 \text{ 元}$$

$$PVC_3 = 334000+45000\times\frac{1-(1+0.08)^{15}}{0.08} = 719177 \text{ 元}$$

$$PVC_4 = 436000+36000\times\frac{1-(1+0.08)^{-15}}{0.08} = 744141 \text{ 元}$$

第三方案费用现值最小，为最优方案。

二、年值法

用现值法进行方案评选时，如果所有的备选方案寿命期相同，可直接比较。对于满足同一用途的备选方案，若各方案寿命不等，则需要确定一个共同的计算期。通常假定备选方案中的一个或几个以同样规模重复若干次，取各备选方案寿命期的最小公倍数作为共同的计算期，这样做是比较麻烦的。

年值法是将各方案在其寿命期内的现金流量按某一给定的标准收益率折算成等额年值进行比较。对于寿命不等的备选方案，使用年值法，可以使方案之间具有可比性。年值法常有的评价指标有净年值和费用年值。

1. 净年值 (Net Average Value，简记为 NAV)。

将净现值折算成等额年金就是净年值。

对于特定项目而言，净年值与净现值的评价结果是等价的。适用于净现值的一切分析，净年值也都适用。净年值大于零，即认为方案具有满意的经济效果，可以通过绝对标准的检验。进行多方案评选时，净年值大者为优。

具体计算净年值时，可以采用灵活的方法，不一定要先求出净现值再求净年值。把初始投资分摊到使用周期内每年的支出，把设备期末残值分列为使用周期内每年的收入，则可求净年值。

[例 80]　按年息率 10%，比较下列的两个投资方案。

方　案	初始投资 (千元)	年经营费用 (千元)	年收入 (千元)	使用寿命 (年)	期末残值 (千元)
1	10000	2200	5000	5	2000
2	15000	4300	7000	10	0

解:　　方案 1 的净年值为:

$$5000-2200-10000\times\frac{0.1}{1-(1+0.1)^{5}}+2000\times\frac{0.1}{(1+0.1)^{5}-1}$$

$$=489.62\ (千元)$$

方案 2 的净年值为:

$$7000-4300-15000\times\frac{0.1}{1-(10.1)^{10}}=258.82\ (千元)$$

两个方案的净年值均大于零，都能通过绝对标准的检验。但方案 1 的净年值大于方案 2 的净年值，说明方案 1 优于方案 2。

2. 费用年值 (Average Cost，简记为 AC)。

将费用现值折算成等额年金就是费用年值。也称平均年成本。费用现值也可称为总成本现值。

费用年值主要用于可以满足相同需要，但寿命期不等的备选方案的评选，费用年值最低的为最优方案。计算费用年值，不一定要先求总费用现值再折算费用年值。将方案的一次性费用如初始投资和大修理费用分摊到使用周期内的每年支出，减去每年得到的设备残值回收收入，再加上每年的经管费用，即可得到费用年值。如例 80 中，

$$AC_1=2200+10000\times\frac{0.1}{1-(1.1)^{5}}-2000\times\frac{0.1}{(1.1)^{5}-1}$$

$$= 4510.38\text{(千元)}$$

$$AC_2 = 4300 + 15000 \times \frac{0.1}{1-(1.1)^{-10}} = 6741.18\text{(千元)}$$

[例 81] 有两种型号的空调设备可供选择，如都能满足需求，年息率 10%，确定应选用哪种型号的空调设备。原始数据见下表:

设备型号	初始投资(万元)	年运行成本(万元)	耐用期(年)	大修理费用(万元)	大修理时间
I	20	3	20	2	第 10 年底
II	10	5	15	1	第 7 年底

解: 先将大修理费用折算成现值，加上初始投资，得到投资总额现值，再分摊投资总额加上年运行成本，得到平均年成本。

$$AC_{I} = \left[\frac{20000}{(1+0.1)^{10}} + 200000\right] \frac{0.1}{1-(1+0.1)^{-20}} + 30000 = 54398\text{ 元}$$

$$AC_{II} = \left[\frac{10000}{(1+0.1)^{7}} + 100000\right] \frac{0.1}{1-(1+0.1)^{-15}} + 50000 = 63822\text{ 元}$$

$AC_{I} < AC_{II}$，所以应选用 I 型空调设备。

与费用现值的适用方法相同，费用年值也适用于有相同的货币收益的项目评估。其中设备更新决策可为典型。随着设备已使用年限的增加，设备逐渐陈旧老化，反映在年经营费用上，即其中的维修费用逐年增加。此时如淘汰旧设备，则需一次支出一笔设备更新投资。是否需更新或何时更新要作经济效果评价。由于更新不扩大原有的生产能力，即理解为备选方案 (更新方案和维护旧设备方案) 的收入相同，可以用费用现值或费用年值作出评价。

[例 82]　Ⅰ 型空调设备现已使用 10 年，需大修理一次，大修理后，还可以使用 10 年，大修理费 2 万元。大修理前每年的运行费用 3 万元，大修理后每年的运行费用增加到 5 万元。如果进行更新，新设备的价格 20 万元，旧设备可卖出价格 5 万元。年息率 10%，确定是否要更新。

解：更新设备，支出 20 万元，节约 2万元大修理费，收入出售旧设备费 5 万元，更新后的费用年值为：

$$(20-5-2)\times\frac{0.1}{1\times(1+0.1)^{10}}+3=5.1157\text{ 万元}$$

大修理后继续使用，需支出大修理费 2 万元，旧设备现价 5 万元折旧，故大修理后的费用年值为：

$$(2+5)\times\frac{0.1}{1-(1+0.1)^{10}}+5=6.1392\text{ 万元}$$

更新后的费用年值小于大修理后的费用年值，所以应更新。

费用年值还可用于生产设备损益平衡的分析。生产同样的产品，要选择与生产规模相匹配的设备才能获得理想的经济效果。大型设备初始投资大，开动的运行成本高，但由于效率高，所以单位产量的运行成本低。例如大型飞机购置价格大，投入航班生产，如果空载运行成本也高，但重载则单位成本低于小型飞机。在怎样的生产规模下选用大飞机呢？用于同样的客货运输，由运价所决定的单位收入相同，则可用费用年值法来分析。

[例 83]　某航空公司为某条航线运输选购飞机有关数据见下表。如果年息率 1 分，问年客运量达到多少才可购买 B 型飞机。

机型	初始投资(万元)	耐用期(年)	年空载成本(万元)	期末残值(万元)	单位重载成本(元/客)
A	2000	15	20	100	150
B	4000	10	60	400	50

解：设两种飞机费用年值均衡时的年客运量为 X。

先将期末残值折算成投资时的现值从初始投资中减去。

$$AC_A = [20000000 - \frac{1000000}{(1.1)^{15}}] \frac{0.1}{1-(1.1)^{15}} + 200000 + 150X$$

$$= 2798002 + 150X$$

$$AC_B = [40000000 - \frac{4000000}{(1.1)^{10}}] \frac{0.1}{1-(1.1)^{10}} + 600000 + 50X$$

$$= 6858834 + 50X$$

$\because AC_A = AC_B \quad 2798002 + 150X = 6858834 + 50X$

得：X＝40608 客。

即如果预期客运量超过 40608 客，那末 B 型机是经济的选择对象。

三、投资收益率法

现值与年值的计算，都与利息率有密切的关系。使用现值法和年值法评价投资方案的经济效果时，都需要预先给定一个投资收益率。这个预定的收益率从纯经济角度讲，以现行银行利率为最低限，低于银行利率则投资活动失去其经济意义。预定的投资收益率也称为标准投资收益率。一般以平均的资金利润率为参照，反映了投资者所希望达到的收益水

平。净现值或净年值大于零，表明投资的收益率高于平均资金利润率。平均利润率应大于银行利息率。银行利息率是借贷资金的使用价格。平均利润率与银行利息率之差，是投资者使用借贷资金所获得的报酬。

有时投资者还会把预定的投资收益率高于平均资金利润率，这是因为在投资决策中还存在一个机会成本。所谓机会成本，对投资者来说，是指由于使用某种资源而必须放弃的该种资源在其他用途上的最高收入；对于资源所有者来说，是该种资源在一切可能的机会中的最高报酬。例如在例80中，选定了方案1。如果没有方案1，还有方案2可以用。所以相对地说，投资者选定方案1，所花费的不是原来的本钱，还要包括没有赚到 (放弃了的方案2) 的钱。这个成本，就是方案1的机会成本。鉴于此，则把方案2的投资收益率作为方案1的预定收益率，方案1在这个预定收益率的条件下净现值或净年值仍大于零，说明方案1本身的投资收益率要高于预定的收益率即方案2的投资收益率。参照机会成本预定的高于平均投资收益率的收益率，可以称之为期望投资收益率。

假如能直接求得各个方案的投资收益率，就可以不必假设诸多的投资收益率，而使方案的评估更简捷。用收益率高低来评价投资方案的方法，称投资收益率法。单方案评价投资收益率以高于银行利息为可行；多方案评选投资收益率以最高者为优。

投资收益率法分为静态投资收益法和动态投资收益法。静态投资收益法不考虑资金的时间价值，只能对投资方案作粗略评价。常用的评价指标有投资利润率、投资利税率和投资净收益率等，计算比较简单。动态投资收益法考虑了资金的时间价值，评价指标有内部收益率和外部收益率。

1. 内部收益率 (Internal Rate of Return，简记为

IR)。

投资收益率即单位投资年平均收益水平。内部收益率反映了投资方案在整个项目寿命期内的平均投资盈利能力。对内部收益率的经济涵义还可以这样解释：在利率为 IR 的条件下，在整个项目寿命期内，始终存在着未被收回的投资，而在项目寿命期终了时，投资恰恰被完全收回。内部收益率的上述解释隐含着一个基本假定，即项目寿命期内的净收益全部用于再投资，而且再投资的收益水平正好等于内部收益率。这个隐含假定正符合复利的"利滚利"的要求。

所以，内部收益率的求解方法与复利年金求利率的方法相同。给内部收益率上述的解释和假定，也正是为了采用复利年金求解利率的方法。

[例 84] 求例 80 的两个方案的内部收益率，并加以比较。

解：残值不能盈利，按银行利息折算现值。

方案 1: $$10000=(5000-2200)\frac{1-(1+IR_1)^{-5}}{IR_1}+2000(1+0.1)^{-5}$$

$$\frac{1-(1+IR_1)^{-5}}{IR_1}=3.127913 \quad \text{查表推值求得: } IR_1=18\%$$

方案 2: $$15000=(7000-4300)\frac{1-(1+IR_2)^{-10}}{IR_2}$$

$$\frac{1-(1+IR_2)^{-10}}{IR_2}=5.55556 \quad \text{查表推值求得 } IR_2=12.4\%$$

$IR_1 > IR_2$ 说明方案 1 优于方案 2。

2. 外部收益率 (External Rate of Return，简记为 ER)。

由于受投资机会的限制，内部收益率的隐含假定，往往难以与实际情况相符。假定每年所获的净收益用于再投资的收益水平相当于平均投资收益率或相当于银行利息率，这时仅考虑外部投资 (初始的和追加的投资) 的收益率，即为外部收益率。对外部收益率的经济涵义还可以这样解释：在整个项目寿命内，每年的净收益都存入银行以银行利率计息计算总额，而这个总额是由外部投资在收益率为 ER 的条件下带来的。

[例 85] 求例 78 的方案的外部收益率。

解：在 ER 的条件下，初始投资 5000 元经过 10 年收益。

$$
\begin{aligned}
5000(1+ER)^{10} &= 660(1+0.12)^{9}+1320\frac{(1+0.12)^{8}-1}{0.12}(1+0.12)+1820 \\
&= 21834.10
\end{aligned}
$$

$$ER=\sqrt[10]{\frac{21834.1}{5000}}-1=0.1588$$

[例 86] 求例 80 的两个方案的外部收益率，并加以比较。

解：$1000(1+ER_1)^5=(5000-2200)\dfrac{(1+0.1)^5-1}{0.1}+2000=19094.28$

$$ER_1=0.1381$$

$$15000(1+ER_2)^{10}=(7000-4300)\frac{(1+0.1)^{10}-1}{0.1}=43031.05$$

$$ER_2=0.1111$$

$ER_1>ER_2$，说明方案 1 优于方案 2。

外部收益率指标用于评价投资方案的经济效果时，需要与标准收益率或银行利息率 R_o 相比较。若 $ER>R_o$，则表明

方案可以取得满意的经济效果;进行多方案评选时,以 ER 大者为优。上面两个例子还表明往往可以用代数方法直接求解 ER。

[例 87] 某项工程初始投资 10 万元,第 5 年追加投资 2 万元,工程寿命期 10 年,无残值。第 1～10 年每年收入 3.5 万元,年经营费用 1.5 万元。年息率 1 分,求外部收益率,并问可行否。

解: $10(1+ER)^{10}+2(1+ER)^{5}=(3.5-1.5)\dfrac{(1.1)^{10}-1}{0.1}=31.875$

设 $X=(1+ER)^{5}$,则上列方程为:

$$10X^{2}+2X-31.875=0$$

解得: $X_1=1.688$, $X_2=-1.888$ (舍去)

$\because (1+ER)^{5}=1.688$

$\therefore ER=\sqrt[5]{1.688}-1=0.1104$

$R_0=0.1$

$ER>R_0$,说明此方案可行。

四、投资回收期法

投资回收期也称返本期,指用投资带来的净收益偿还全部投资所需要的时间。一般以年为单位。按是否考虑资金的时间价值,可分为静态投资回收期和动态投资回收期。静态投资回收期只能对投资建议进行粗略评价,侧重于考虑投资的安全性。动态投资回收期实际上就是从投资年开始到方案净现值等于零的年限。计算动态回收期所用的收益率一般为银行利息率,理解为收益不再投资。其计算方法与复利年金求时期的方法相同。单方案论证时,投资回收期小于设备实际寿命,方案即可行,说明在方案的寿命期内可以收回投资。多方案评选时,如方案的设备使用寿命相同,则回收期最短者为优;如方案的使用寿命不等,则以 $\dfrac{\text{动态回收期}}{\text{方案寿命期}}$ 最小为

优。

[例 88]　按年息率 10%，用投资回收期法评选下列两个方案：

方　案	初始投资（千元）	年经营费用（千元）	年收入（千元）	使用寿命（年）	期末残值（千元）
1	10000	2200	5000	4	2000
2	15000	4300	7000	10	0

解：设 N_1，N_2 和 n_1，n_2 分别为两个方案的使用寿命期和回收期。

方案 1：$$(5000-2200)\frac{1-(1+0.1)^{-n_1}}{0.1}=10000-2000(1+0.1)^{-4}$$

$$\frac{1-(1.1)^{-n_1}}{0.1}=3.083561818$$

$$n_1=3.9 \qquad \frac{n_1}{N_1}=0.975$$

方案 2：$$(7000-4300)\frac{1-(1+0.1)^{-n_2}}{0.1}=15000$$

$$\frac{1-(1.1)^{-n_2}}{0.1}=5.555556$$

$$n_2=8.5 \qquad \frac{n_2}{N_2}=0.85$$

虽然 $n_1 < n_2$，但因为使用期不同，无法评选。不能作选择方案 1 的决策。这一点可用年值法和投资收益法得到验证。参考例 80、例 84 和例 86，例 88 中，$N_1=4$，则：

$$NAV_1=5000-2200-10000\times\frac{0.1}{1-(1.1)^{-4}}+2000\frac{0.1}{(1.1)^4-1}=76.23$$

$$10000=(5000-2200)\frac{1-(1+IR_1)^{4}}{IR_1}+2000(1.1)^{4}$$

$$\frac{1-(1+IR_1)^{4}}{IR_1}=3.083561818 \quad \text{查表推值求得 } IR_1=11.3\%$$

$$10000(1+ER_1)^4=(5000-2200)\frac{(1.1)^4-1}{0.1}+2000=14994.8$$

$$ER_1=\sqrt[4]{\frac{14994.8}{10000}}-1=10.66\%$$

$NAV_2=258.82>NAV_1$,

$IR_2=12.4\%>IR_1$,

$ER_2=11.11\%>ER_1$

而例 88 中 $\frac{n_2}{N_2}<\frac{n_1}{N_1}$，所以应当选择方案 2，这样就与用年值法和收益率法的选择取得一致的决策。

第二节　偿债

投资须筹资。筹资的方法之一是借债，包括发行债券。举债要偿还。还债的方法有多种，其中最主要的是偿债基金法。还有"气球法"等。

借款人逐期提存一定的金额用复利计算储积以准备将来偿还负债，逐期提存的金额称偿债基金。设立偿债基金是因为，如负债到期一次偿还势难应付；即使有此力量而一时付出巨款，财政上亦不无影响。为解决此困难，故分期提存基金以准备清偿之用。一般有提存储积和分期还本两种方法。

一、提存储积法

将应还金额逐期提存储积，到债务期满一次偿还的还债

方法称提存储积法。债务为 P，经过 n 期后在利息率为 R 的条件应偿还额 $S=P(1+R)^n$。现要将 S 在 n 期内逐年提存储积，求提存额。实际上就是已知 S'_n、n、R，求年金 A。

$$A=S'_n\frac{R}{(1+R)^n-1}$$，所以把 $\frac{R}{(1+R)^n-1}$ 称为偿债基金系数。

实务中，因各种情况不同，具体计算方法也不同。

1.负债无息而存款有息。

无息贷款是很少的。有的贷款需每期付息，本金在最后一期还清。这样，在整个借款期限内本金保持不变，每期的利息是等额的。这种还本付息的方法称为等额利息法。按等额利息法求还本的偿债基金，可视同为负债无息，要还的只是本金。

故：$A=P\cdot\frac{R}{(1+R)^n-1}$。如果每期内 A 的提存次数和复利次数有变化时，则可参照第二章第二节的各种情况。

［例 89］ 公司获某项专用无息贷款 1000 万元，三年后归还。现拟每年存储偿债基金，利息年率 6 厘，三年到期足敷偿还该项债务。问每年应存数额？

解：贷款无息，三年后应还 1000 万元。

则每年应存：$A=1000\cdot\frac{0.06}{(1+0.06)^3-1}$

$=1000\times0.314109812=314.109812$ 万元

≈314.11 万元

2、负债与存款利率相同。

负债到期应还额为 $P(1+R)^n$，则每期的偿债基金

$$A=P(1+R)^n\frac{R}{(1+R)^n-1}=P\cdot\frac{R}{1-(1+R)^{-n}}。$$

很明显，这实际上是把 P 作为期末年金现值，已知 n 和 R，求年金。

上述每期的偿债基金，也可以是贷款无息存款有息的应偿债数加上每期的负债利息。因为存款利率与负债利息率同，则：

$$A=P\frac{R}{(1+R)^n-1}+P\cdot R=P\cdot\left(R+\frac{R}{(1+R)^n-1}\right)$$

$$=P\cdot\frac{R}{1-(1+R)^{-n}}$$

两种考虑方法的结果是一样的。

[例 90] 例 89 中，若贷款利率为年率 6 厘，其他条件不变。求每年应存偿债基金数。

解：(1) 利用例 89 的答案可使计算简化。

$$A=314.11+1000\times0.06=374.11\text{ 万元}$$

$$(2)\ A=1000\frac{0.06}{1-(1+0.06)^{-3}}=1000\times0.374109812$$

$$=374.109812\text{ 万元}\approx374.11\text{ 万元}$$

当每期的复利次数和付款次数有变化时，如果借款和存款的复利次数不同，可求借款到期的终值 $S=P(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot n}$，再从期末终值求年金。其中提存次数和复利次数的变化可参照第二章第二节。如果借款和存款的复利次数相同，则即是期末现值求年金。提存次数和复利次数的变化，同第二章第二节。

3. 负债与存款利率不相同。

设负债的利息率为 R'，存款的利息率为 R。此时，又分两种情况：

第一，每期付息，一次还本。每期付息为 PR'，则每期的偿债基金为：$P \cdot \frac{R}{(1+R)^n-1} + PR'$。

第二，一次还本付息。到期应还本息为 $P(1+R')^n$，则每期的偿债基金为：$A = P(1+R')^n \frac{R}{(1+R)^n-1}$。

如果 R'>R，每期付息一次还本对还债者有利；如果 R'<R，则一次还本付息对还债者有利。

［例 91］ 例 89 中，若贷款利率为 4 厘，其他条件不变，求：每期付息、一次还本的每期偿债基金，和一次还本付息的每期偿债基金。

解：(1) 每期付息、一次还本，每期偿债基金为：

$$\frac{1000 \times 0.06}{(1+0.06)^3-1} + 1000 \times 0.04$$

$$= 314.11 + 40 = 354.11 \text{ 万元}$$

(2) 一次还本付息，到期应还本息为 $1000\ (1.04)^3$，每期偿债基金为：

$$A = 1000(1.04)^3 \frac{0.06}{(1+0.06)^3-1} \doteq 353.33 \text{ 万元}$$

［例 92］ 例 91 中，若贷款利率为 8 厘，其他条件不变，求两种情况的每期偿债基金。

解：(1) 每期付息、一次还本：

$314.11 + 1000 \times 0.08 = 394.11$ 万元

(2) 一次还本付息:

$$A=1000(1.08)^{3}\times 0.314109812=395.69 \text{ 万元}$$

当复利次数和付款次数变化时,先求负债的变动,再求提存的变化,参见第二章第二节。

二. 分期偿还法

负债既可按期提存基金,以备到期一次偿还之用,亦可分期偿还。分期偿还又分定期等额摊还和不定期二种情况。等额摊还法也称等额年金法。即在相等的间隔期内,每期归还等额的本利和,其中付息额逐期递减,还本额逐期递增,其和不变,至最后一期归还后,所欠本息正好还清。采用分期偿还债务的方法如没有特别说明,一般都是指等额年金法。每期应还额的计算,即是已知期末年金现值、时期和利率,求年金。因随提随还,从提存储积法的角度考虑,即是负债与存款利息率相等。至最后一期正好还清本息,所以是期末年金,最初的负债额即是现值,时期即还债期。

[例 93] 公司借某专项贷款 2500 万元,年率 6 厘,分 7 年摊还,求每年应还数。

解: $$A=2500\frac{0.06}{1-(1+0.06)^{-7}}=447.837545 \text{ 万元}$$

用分期偿还法一般不会要求借债的当年即开始偿还,而总是给债务人一定的宽限期,在宽限期内可以不必还债,过了宽限期再开始分期偿还。此时欲求等额偿还额,实质上是发生一个现值。先延 w 期,再求 n 期年金,具体计算可参照第三章第一节。复利次数与偿还次数的变化,同第二章第三节。

实务中,每次的还债额中,多少是作为付息的,多少是作为还本的,需要划分清楚,这关系到债权债务双方对借贷情

况的了解。因为，每期所还债款$\dfrac{P.R}{1-(1+R)^{-n}}>PR$，所以对还债款的划分时，先扣除当期应付的全部利息，剩余部分为还本额。例如例93中，第一期还款额447.837545万元，其中$2500\times0.06=150$万元，视为第一期本金的全部利息，其余297.837545万元作为还本；这样，到第二期初所欠本金应为$2500-297.837545=2202.162455$万元，而第二期的全部利息为132.129748万元；第二期末还款后，所欠本金还剩$2202.162455-(447.837545-132.129748)=1886.454658$万元。以下类推。上述过程可编制成分期偿还本息明细表。

［例94］ 公司借款2500万元，年率6厘，分7年摊还，编置分期偿还本息明细表。

解: 每期偿还447.837545万元，明细表如下:

期数	各期初欠本金(元)	每期摊还本息额(元)	每期摊还本息之细数	
			每期应付利息	每期摊还本金
1	25,000,000.00	4,478,375.45	1,500,000.00	2,978,375.45
2	22,021,624.55	4,478,375.45	1,321,297.47	3,157,077.98
3	18,864,546.57	4,478,375.45	1,131,872.79	3,346,502.66
4	15,518,043.91	4,478,375.45	931,082.63	3,547,292.82
5	11,970,751.09	4,478,375.45	718,245.07	3,760,130.38
6	8,210,620.71	4,478,375.45	492,637.24	3,985,738.21
7	4,224,882.50	4,478,375.45	253,492.95	4,224,882.50
合计	105,810,469.33	31,348,628.15	6,348,628.15	25,000,000.00

各栏总数可以进行检验。如第五栏总数等于第一期初欠本金；应付利息总数加摊还本金总数等于摊还本息额总数；各期欠本金总额乘以利息率等于应付利息总数。

用分期摊还法偿还债务，偿还数次之后，欲知尚欠的本

金，也可以从本息明细表上得知。例 94 中，偿还 4 期以后，还欠本金 11，970，715.09 元。要注意的是，这尚未偿还的 11,970,715,09 元是第五期初的值，而不是第一期初的值。

欲知分期摊还数次后的债务余额，也可以直接计算而不必做成明细表后再查寻。本金值等于等额摊还年金期末现值。所以摊还数次后，所余债务本金，亦等于所余摊还次数的期末年金现值。设欠债本金为 P，利率为 R，分 n 期等额摊还，已还 v 期 ($v<n$)，Q_{n-v} 为已还 v 期后的债务余额。则

$$Q_{n-v}=P\frac{R}{1-(1+R)^{-n}}\cdot\frac{1-(1+R)^{-(n-v)}}{R}$$

$$=P\frac{1-(1+R)^{-(n-v)}}{1-(1+R)^{-n}} \qquad (1—85)$$

［例 95］ 例 93 中，已还三期，求债务余额。

解：$Q_{n-v}=2500\frac{1-(1+0.06)^{-4}}{1-(1+0.06)^{-7}}=1551.804391$ 万元

可以用例 94 的明细表来验证例 95 的答案是正确的。

如果每期的复利次数和付款次数有变化，在每次偿还额的本息分割计算也会有相应的变化。列举如下：

1. 每年复利 m 次，年末还款一次。

［例 96］ 负债 5 万元，年息率 5 厘，每年复利二次，分二年还清。求每年还债额并细分本息。

解：$A=50,000\times\frac{(1+\frac{0.05}{2})^{2}-1}{1-(1+\frac{0.05}{2})^{-2\times 2}}$

$=26,914.06$ 元

$$R_E=(1+\frac{R_N}{m})^m-1$$

$$=(1+\frac{0.05}{2})^2-1=0.050625$$

按每期偿还 26,914.06 元，年实际利率 0.050625 编明细表：

期数	各期初欠本金(元)	每期摊还本息额(元)	每期摊还本息之细数	
			每期应付利息	每期摊还本金
1	50,000.00	26,914.06	2,531.25	24,382.81
2	25,617.19	26,914.06	1,296.87	25,617.19
合计	75,617.19	53,828.12	3,828.12	50,000.00

2.每年复利一次，每年还款 l 次。

［例 97］ 负债 1 万元，年息率 6 厘，每年复利一次，每半年偿还一次，二年还清。求每次还债额并细分本息。

解：每次还款额

$$\frac{A}{l}=10,000\times\frac{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1}{1-(1.06)^{-2}}=2,687.46\text{ 元}$$

每半年的利率

$$R_l=(1+R_E)^{\frac{1}{l}}-1=(1+0.06)^{\frac{1}{2}}-1=0.029563$$

按每次还款 2,687.46 元，每次利息率 0.029563 编明细表：

期数		各期初欠本金(元)	每期摊还本息额(元)	每期摊还本息之细数	
年	次			每期应付利息	每期摊还本金
1	1	10,000.00	2,687.46	295.63	2,391.83
	2	7,608.17	2,687.46	224.92	2,462.54
2	3	5,145.63	2,687.46	152,12	2,535.34
	4	2,610.29	2,687.46	77.17	2,610.29
合计		25,364,09	10,749.84	749.84	10,000.00

3.每年复利 m 次,每年还款 l 次。

[例 98] 负债 5 万元,年息率 6 厘。每季复利一次。每半年还款一次,二年还清。求每次还债额并细分本息。

$$\text{解: 每次还款额}\frac{A}{l}=50,000\times\frac{(1+\frac{0.06}{4})^{\frac{4}{2}}-1}{1-(1+\frac{0.06}{4})^{-1\times2}}$$

$$=13,458.59\text{ 元}$$

$$\text{每次还债的利率 } R_l=(1+\frac{R_E}{m})^{\frac{m}{l}}-1=(1+\frac{0.06}{4})^{\frac{4}{2}}-1$$

$$=0.030225$$

按每次还款 13,458.59 元,每次利息率 0.030225 编明细表:

期数 年	期数 次	各期初欠本金(元)	每期摊还本息额(元)	每期摊还本息之细数	
				每期应付利息	每期摊还本金
1	1	50,000.00	13,458.59	1,511.25	11,947.34
	2	38,052.66	13,458.59	1,150.14	12,308.45
2	3	25,744.21	13,458.59	778.12	12,680.47
	4	13,063.74	13,458.59	394.85	13,063.74
合计		126,860.61	53,834.36	3,834.36	50,000.00

4. 每年复利 m 次，每年还款 m 次.

即前例中的 $m=1$，每次还债的利率为 $R_1=\frac{R_E}{m}$。

5. k 年还款一次，每年复利一次。

[例 99] 负债 10000 元，年息率 1 分，每二年底还款一次，8 年还清。求每次还债额并细分本息。

解：每二年还一次债的利率。

$$R_K=(1+R_E)^K-1=(1+0.1)^2-1=0.21$$

每次还债额

$$A_K=\frac{10000\times 0.21}{1-(1+0.1)^{-8}}=3936.32\text{ 元}$$

按每次还债 3936.32 元，每次利率 0.21 编明细表：

期数	各期初欠本金(元)	每期摊还本息额(元)	每期摊还本息之细数	
			每期应付利息	每期摊还本金
1	10,000.00	3,936.32	2,100.00	1,836.32
2	8,163.68	3,926.32	1,714.37	2,221.95
3	5,941.73	3,926.32	1,247.76	2,688.56
4	3,253.17	3,926.32	683.27	3,253.15
合计	27,358,58	15,745.28	5,745.30	9,999.98

最后还本总额差 0.02 元是四舍五入的计算原因。实际上每次应还 3936.324 元，四次共舍去 0.0016 元。

6. k 年还款一次，每年复利 m 次。

则每次还债的利率为

$$R_K = \left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{m.k} - 1$$

$$A_k = P \cdot \frac{R_k}{1-\left(1+\frac{R_N}{m}\right)^{mm} - 1}$$

再用 A_K 和 R_K 编制分期偿还本息明细表。举例略。

三、"气球法"还款的本息分解

所谓"气球法"还债，是指在宽限期以外的任何时期内任意偿还任意额，规定一个最后期限，至迟在最后期把所欠本息全部偿还。债务是"气球"，还债即如给气球放气。一次性偿还是气球法的特例。

采用气球法还债，关键是要知道任意时期偿还一笔债务后，还欠多少债。也即要对一笔还债款作本息分解。由于任意期还的任意一笔债务并不一定大于本金在任意期内的利息，所以气球法还款的本息分解法与分期摊还的本息分解法不同。

气球法还款的本息分解，本金的起始计息时间始终不移动。任意一次还债的本金和这部分本金应承担的利息，组成了任意一次的还债额。将其分解，从全部债务本金中扣除所还本金，尚欠本金的计息时间仍从债务最初发生时算起。

［例 100］ 负债 1 万元，三年还清。年息率 1 分，一年复

利二次。在一年零九月时先还了 2000 元；问此时还欠债多少?到期应还多少?

解: 设 $S_1=2000$ 元，$n_1=1.75$，P_1 为 2000 元还款中的本金。

$$S_1=P_1(1+\frac{R_N}{m})^{m\cdot n}=P_1(1+0.05)^{3.5}$$

$$P_1=\frac{2000}{(1+0.05)^{3.5}}=1,686.04 \text{ 元}$$

还欠债 $10,000-1,686.04=8313.96$ 元

到三年期满应还:

$8313.96(1+0.05)^6=11141.50$ 元

以上是复利的气球法还款的本息分解。如果用单利计息，则比较复杂。设还款为 S，则 n、R 都已知。求本金 P 和利息 I。

$$S=P(1+nR),\ P=\frac{S}{1+nR}$$

$$I=P.n.R=\frac{S.n.R}{1+nR}$$

[例 101] 某贷户 1984 年 10 月 21 日贷款 12000 元，月息率为 8.1‰，单利计息。1987 年 9 月 15 日还款 5430 元，问还欠债多少?

解: $n_1=360(87-84)+30(9-10)+(15-21)=1044$ 天

$R_1=0.0081\div30=0.00027$

$$P_1=\frac{5430}{1+1044\times0.00027}=4235.97 \text{ 元}$$

尚余债务: $12000-4235.97=7764.03$ 元

如果利息率有变化，要分段计息，则:

$$P=\frac{S}{1+\sum_{i=1}^{k}n_iR_i}$$

$$I=\frac{\sum_{i=1}^{K}n_iR_i}{1+\sum_{i=1}^{K}n_iR_i}$$

四. 平均付款期和平均付款值。

以上讨论的都是一笔债务，分次偿还。如果欲把几笔债务合并作一次性偿还，则要求得平均付款期或平均付款值。

就各个到期时期不同、数目不等的款项，求一平均到期日，作一次性支付，使其结果与逐笔按期付款的情况相同，而不致发生利息的差异，称为平均付款期。

就各个到期时期不同、数目不等的款项，汇总于指定时期一次付清的付款数，使其结果与逐笔按期付款的情况相同，而不致发生利息的差异，称为平均付款值。

1. 平均付款期的计算。

设以 $S_1, S_2, S_3, \cdots S_j$ 代表各期应付数，R 为利率。

$n_1, n_2, n_3 \cdots n_j$ 为各应付款时期，X 为平均付款期。

则: $(1+R)^{-X}(S_1+S_2+\cdots S_j)$

$$=(1+R)^{-n_1}S_1+(1+R)^{-n_2}S_2+\cdots+(1+R)^{-n_j}S_j$$

[例 65] 某君现欠款 3 笔，1 年后 500 元，2 年后 300 元，3 年后 400 元。今欲一次还清 1200 元而不另增利息，年息率 6%。求: 还款日期。

解: $(1+0.6)^{-X}(500+300+400)$

$$=(1.06)^{-1}\cdot 500+(1.06)^{-2}\cdot 300+(1.06)^{-3}400$$

$$(1.06)^{-X}=\frac{(1.06)^{-1}500+(1.06)^{-2}300+(1.06)^{-3}400}{1200}$$

$$X=\frac{\lg 1200-\lg 1074.54}{\lg 1.06}$$

$$=\frac{0.047957}{0.025306}=1.895\text{ 年}$$

1.895 年约 1 年 11 个月，即 1 年 11 个月后还款。

2. 平均付款值的计算。

设 $\overline{S}$ 为还期是 $\overline{n}$ 的平均付款值，其余假设同上，则：

$$(1+R)^{\overline{n}}\overline{S}$$

$$=(1+R)^{n}S_1+(1+R)^{n}S_2+\cdots\cdots+(1+S)^{nj}Sj$$

[例 66] 例 65 中，如果某君定于第二年底还清全部欠款，求应还款数。

解：$$\frac{\overline{S}}{(1+R)^2}=\frac{S_1}{(1+R)}+\frac{S_2}{(1+R)^2}+\frac{S_3}{(1+R)^3}$$

$$\overline{S}=500\times(1.06)+300+\frac{400}{1.06}=1207.36\text{ 元}$$

第三节 还本销售

还本销售是一种新的销售方式。“今日售出，他年还本”。此“本”不是今日售价的终值，而是今日售价的面值。即今日售价一元，若十年后还本一元。销售方赚取的正是这二个一元之间的时间价值。

在贷款紧缩，利息率上升和库存量过大的情况下，还本销售对扩大销售、加速资金周转、缓解资金拮据的局面具有

重要意义。这种销售方式可以理解为销售方企业发行债券，期末还本，期初一次付给购买方所需的商品作为债券的贴息。

实行还本销售，销售方暂时扩大了销售额和利润，但同时也背上了还本的债务。因此，要考虑将滞销商品销出去，还要考虑偿还能力。

一、商品保本保利储存期

选择滞销商品作还本销售，可先测算该商品的保本、保利期。如商品能在保利期内销出，即不必采用此法；如能在保本期内销出，一般亦可不用此法，但资金周转确有困难，也可采用。在算出某商品的保本保利期后，同时进行市场调查和销售预测，预测出该商品可能的销售时期，就可作出是否采用还本销售的决策。

计算商品的保本期，其基本出发点是：一批商品的销售净利不随销售期的长短而变动，但商品资金的利息则随销售期的长短而变动。当支付的商品资金利息等于销售净利时，此时的销售期就是保本销售期。在整个销售期内，销售是连续发生的，商品资金的量也随着不断减少，这样就使商品资金利息的计算比较困难。因此，我们假定商品的销售是一次发生的，在未销售出去以前是商品的储存期。商品资金的利息随储存期的长短而变动。这样就可以求出商品的保本储存期。

商品保本储存期的资金利息＝商品销售净利

在保本的基础上，如果还期望获得一定的利润，则可以用下列等式求得商品的保利储存期：

商品保利储存期的资金利息＝商品销售净利－目标利润

具体计算时，又有单利计息和复利计息两种情况。

[例 102] 某商店购买一批商品，进货价 125 万元，销售

价 147.06 万元。该项商品的销售费用率 5%，营业税率 3%。保管费每天每万元商品 8 元，日利息率万分之六，单利计息。

求：(1) 该批商品的保本储存期；(2) 如果该批商品的目标利润率为 4%，求保利储存期。

解：(1) 销售费用和税金随销售价而变化：

销售净利＝销售价－进货价－销售费用－销售税金。

保管费用和商品资金利息随进货价和储存期而变化。设保本储存期为 n_0，则：

$$n_0(125\times0.0006+125\times0.0008)$$
$$=147.06-125-147.06(0.05+0.03)$$

$n_0=59$ 天

(2) 目标利润是销售价的比例。设保利储存期为 n_1，则：

$$n_1(125\times0.0006+125\times0.0008)$$
$$=147.06-125-147.06(0.05+0.03)-147.06\times0.04$$

$n_1=25$ 天

复利计算保本保利期比较复杂。这是因为保管费也是一个变量，如例 102 所示。因此，商品资本利息要用复利计算时，先要假设保管费固定。

[例 103] 某商品出厂价 100 元，批发价 116 元。批发商批进该商品，批发税率 2%，销售费用率 5%，保管费用率 2%。银行利率月息 1 分，每月复利一次。如果批发商每批发一件想赚取 4 元。求该商品的保本储存期和保利储存期。

解：分别设保本储存期为 n_0，保利储存期为 n_1。则：

$$100(1+0.01)^n-100$$
$$=116-100-100\times0.02-116(0.05+0.02)$$
$$(1.01)^n=1.0588$$

$$n_0=\frac{lg1.0588}{lg1.01}\approx5.74\text{ 月}=172\text{ 天}$$

$$100(1+0.01)^{n}$$
$$=116-100\times0.02-116(0.05+0.02)-4$$
$$(1.01)^{n}=1.0188$$

$$n_1=\frac{lg1.0188}{lg1.01}\approx1.87\text{月}=56\text{天}$$

二、商品储存的保本利息率

由于商品生产的均匀性和消费的季节性，商品的储存期一般是确定的。那么在怎样的利息率下才能使商品储存保本呢?其基本出发点与保本期的思路一样。

[例 104] 春季生产的冰砖要储存到夏季出售。平均贮存期为 3 个月。已知中冰砖的零售价为每块 0.65 元，出厂价为每块 0.45 元。每块中冰砖的储存成本为 0.05 元，销售成本包括税金每块 0.03 元。现商业部门欲借一笔专用贷款来收购春季生产的中冰砖以调剂生产与消费的矛盾。问银行贷款月息率是多少才不致使商业部门亏本。分单利和每月复利一次两种情况求月息率。

解: 设保本的月息率为 R。

(1) 单利计算:

$65-(5+3)=45(1+3R)$ $\qquad R=0.089$

(2) 复利计算:

$65-(5+3)=45(1+R)^3$ $\qquad R=0.082$

如果储存期已定，还想获得期望利润，其保利利息率的计算，与保利期的计算思路相同。

[例 105] 例 104 中，如果商业部门每贮存一块中冰砖欲赚取 0.07 元利润。问贷款月息率是多少才能使商业部门有利可图。

解: 设保利时的月息率为 R_1。

(1) 单利计算:

$65-(5+3)-7=45(1+3R_1)$　　　　　$R_1=0.037$

(2) 复利计算:

$65-(5+3)-7=45(1+R_1)^3$　　　　　$R_1=0.036$

综合例 104 和例 105 说明，银行贷款单利计息，在月息率 8.9% 时，商业部门不亏本；低于 8.9%，商业部门可赢利。月息率 3.7%，商业部门获得期望利润；低于 3.7% 商业部门获得的利润可超过期望的目标。

三、还本销售的偿还

当预测的销售时期大于保本储存期，为归还贷款，减少利息支付和保管费用，可以采取各种促销手段，如削价、分期付款等等。而还本销售是一种比较受欢迎的手段。采取还本销售时，首先要考虑销售方的偿还能力，确定偿还期。

还本有各种形式，可以分期偿还，也可以一次偿还。偿还额可以是全部面值，也可以是部分面值。我们讨论一次偿还全部面值。

要在商品销售后一段时间内归还本金，原则上应该用商品还本销售所解冻资金，在今后一段时间内销售周转所创造的利润来归还。所以归还期的确定取决于解冻资金的获利能力。解冻的一般都是流动资金。流动资金年利润率等于流动资金年周转次数乘以销售利润率。因此，可以推算出解冻资金的年创利率。令其为 R，归还期为 n，则 $(1+R)^n\geqslant 2$，即至少要解冻资金创利大于本金时，才能归还本金。大到什么程度，则要看消费者愿意接受的程度。

销售方在作还本销售偿还决策时有两种方法:

1. 先测定获利能力 R，再确定偿还期 n。

$$n \geqslant \frac{lg\,2}{lg(1+R)}$$

2．先试定目标偿还期 n，后确定目标获利能力 R，$R \geqslant \sqrt[n]{2}-1$，再测算实际获利能力。如能达到目标获利能力，则目标偿还期可行；如达不到目标获利能力，则修正目标偿还期，或设法提高实际获利能力。

［例 106］　商店欲采取还本销售的方式推销某种型号的电冰箱。该商店流动资金周转年平均 4 次，年销售利润率 4%，问几年后可以还本。如欲 4 年后还本，资金周转次数不变，年销售利润率需达到多少才能有偿还能力？

解：该商店的流动资金年利润率为 R。

$R=4\%\times4=16\%$

$$n \geqslant \frac{lg2}{lg(1+R)}$$

$n \geqslant 4.67$ 年

即：销售 4.67 年后可以还本。

如欲 4 年还本，则：$R \geqslant \sqrt[4]{2}-1$，$R \geqslant 18.92\%$。

即：年销售利润率 $\geqslant 18.92\%\div4=4.73\%$ 时，才能有偿还能力。

第四节　债　券

一、债券概述

债券是一种确定债权债务关系的凭证。证明持券人有按约定的条件取得固定利息和到期收回本金的权利。债券发行人要承担还本付息的义务。债券多由机构或组织发行，包括

政府机关和得到准许发行的公司组织。债券发行人是债务人，发行债券是筹措资金的手段。债券持有人是债权人，人数众多，债券对于持券人是投资赢利的途径。债券是公开化、社会化的债权凭证，可以公开转让或在市场上买卖，因此债券又是一种促使资金流转的金融工具。

1、债券的种类。债券按发行者细分，有政府债券即国库券、公债和市政债券，公司债券，以及金融债券；按到期时间分，有长、中、短期债券。初发行时，可能是长期债券，随着到期时刻的临近，在证券市场上就成为中期或短期债券。一般说，一年以内到期的为短期，10 年以上到期的为长期，一年以上十年以内的为中期。

2.债券的面值和市场价格。债券票面上载明的币种和金额是债券的面值，作为债券还本和付息计算的依据。债券的市场价格是一种债券在证券交易市场上买卖时的价格。以证券交易所为主方，证券交易所买入称买入价，证券交易所卖出称卖出价。卖出价总大于买入价，二者差额是交易所的利润。一般讲债券价格是指卖出价。债券价格等于债券面值，称为平价，平价的情况很少。价格大于面值称为溢价；价格低于面值称为折价。债券持有人所持债券面值不变，但价格会上下浮动。所以债券持有人享有市场收益，也要承担市场风险。

3.债券的偿还期。偿还期对于不同主体有不同含义和计算。对于债券发行人，偿还期是发行债券到偿还债券本金的这一段时间。这个偿还期应在券面上载明。有的债券一次偿还全部本金总额，有的债券分批偿还全部本金。这里的分批偿还本金不是指某一张债券的面值被分期偿还，而是对某种债券抽签分批偿还，中签者在到期时得到全部偿还。对于债券持有人，偿还期是购入债券到债券偿还时刻这一段时间。这个偿还期称为购买偿还期，是购入债券者计算实际收益率的依据之一。债券发行后到偿还前，债券可在市场上作任意

次的交易。所以，债券发行偿还期是固定的，债券购买偿还期总小于发行偿还期。只有债券发行之初即购入，并一直保留到债券偿还之日时，那么该债券持有人的购买偿还期等于债券发行偿还期。在信用发达的社会里，这种情况不多见。

4.债券的偿还方式。偿还包括还本和付息。按还本和付息是否合并进行，偿还方式分为两大类。

(1) 到期一次还本付息。即到债券发行偿还期满，本金与利息合并一次偿还。本金即是债券面值，利息则有单利计息和复利计息两种。我国目前发行的公私债券，大部分是单利一次还本付息。短期债券往往用贴现的方式付息。即发行时价格就低于面值，到期按面值还本，不另付息。面值大于发行价格的差额是贴现息。

(2) 定期付息，到期还本。在整个债券发行偿还期内，每过一定的时间付给固定的利息，有一年一次或一年数次者。比较通行的是一年一次或两次。到期按面值还本。

一次还本付息的债券，发行期后一定时间起直到偿还期止都是“带息”的。定期付息债券，即期付息前是带息的，即期付息后是不带息的。这些带息与否都包含在债券的交易价格中。

债券持有人除要承担市场风险还要承担违约风险。即债券发行人到期没有付息或还本的能力。无力付息可以暂时拖欠，无力还本则意味着债券发行人的破产，虽然债券有优先偿还权，债券持有人的损失或大或小总是难免的。

5.债券的收益。正因为购买债券存在着违约风险和市场风险，购买债券被认为是一种投资行为而不是储蓄行为。投资要获得收益，风险越大收益越高，衡量收益高低的指标是收益率。债券的收益率有名义收益率和实际收益率。名义收益率亦称票面收益率，是债券发行人支付的以面值为本金的年利息率。这个利息率应在债券票面上载明，一般在整个债

券发行偿还期内是固定的。因此，用债券面值乘以名义收益率得到的年度票面收益也是固定的。实际收益率是债券购买者购买债券所获得的实际收益与购券投资的比例。不同的债券偿还方式，有不同的计算方法。

二、一次还本付息债券的实际收益率。

实际收益率是购买债券实际收益与购券投资即债券价格的比例。这个收益是经过了从购买债券时起到债券发行偿还期满这一段时间才获得的。而实际收益是债券面值本利和与债券价格的差额。债券面值本利和是由债券面值、票面收益率、债券发行偿还期和计息方式决定的。

1.单利计息的实际收益率。

$$R_0=\frac{P_N(1+n\cdot R_N)-P_0}{P_0\cdot n_0} \tag{1—86}$$

式中：R_0——实际收益率

P_N——债券面值

R_N——债券名义收益率

n——债券的发行偿还期

P_0——债券价格

n_0——债券的购买偿还期

$P_N(1+n\cdot R_N)$ 是单利计息的债券面值本利和。如果复利计息，则债券面值本利和 $P_N(1+R_N)^n$。采用何种计息方式计算债券面值本利和，是由发行人决定，并应在债券面上载明。我国目前发行的国库券、公债和绝大部分公司债券都是单利计息一次还本付息的债券。

［例 107］ 我国 1986 年发行的国库券 5 年期满，年息率 10%，1991 年 7 月 1 日还本付息。1990 年 6 月 25 日上海国库券市场 100 元票面的国库券售价 131.8 元。求：购券者

的年收益率。

解：100 元票面的国库券到 1991 年 7 月 1 日还本付息可得：$100(1+5\times10\%)=150$ 元。

1990 年 6 月 25 日到 1991 年 7 月 1 日共 $\frac{366}{360}$ 年，购买者年收益率为：

$$R_0=\frac{150-131.8}{131.8\times\frac{366}{360}}=13.58\%$$

2.复利计息的实际收益率。

如果债券的购买偿还期较长，购买者往往要用复利方法计算实际收益率以决定投资与否。假定债券面值本利和的计算是单利计息。

$$R_0=\sqrt[n_0]{\frac{P_N(1+n\cdot R_N)}{P_0}}-1 \qquad (1—87)$$

[例 108] 我国 1987 年发行的国库券 5 年期满，年息率 10%，1992 年 7 月 1 日还本付息。1990 年 6 月 25 日上海国库券市场 100 元票面的国库券售出价为 114.4 元。购买者欲按复利计算，求其年实际收益率。

解：100 元面值国库券到 1992 年 7 月 1 日可得 150 元。1990 年 6 月 25 日到 1992 年 7 月 1 日共 $2\frac{6}{360}$ 年，

$$R_0=\sqrt[2\frac{6}{360}]{\frac{100(1+5\times10\%)}{114.4}}-1=14.38\%$$

三、定期付息到期还本债券的实际收益率

定期付息债券，每期的利息等于债券面值乘以该期的利

息率。这个利息额也称为票面收益额，是固定的。每期间隔不管是一年数期或几年一期，都可以按复利利息率的转化公式转化成一年一期的实际票面利息率。所以我们讨论的债券都假定每年度付息一次。定期付息的债券实际收益率有当期实际收益率和到期实际收益率两种。

1.当期实际收益率。

当期实际收益率是从购买日起到最近一次付息日止的收益率。其思路同发行偿还期为一年一次还本付息债券的实际收益率。

$$R_0=\frac{P_N(1+R_N)-P_0}{P_0 \cdot n_0} \qquad (1-88)$$

[例 109] 某公司债券面值 100 元，每年 7 月 1 日付息一次，券面利率 10%。4 月 26 日该债券售出价 107 元，求其当期实际收益率。

解：4 月 16 日到 7 月 1 日共 $\frac{65}{360}$ 年，

$$R_0=\frac{100(1+10\%)-107}{107}\times\frac{360}{65}=15.53\%$$

2.到期实际收益率。

到期实际收益率是指购买债券后，不再售出到债券的发行偿还期满的实际收益率。可以参照本章第一节的投资收益率来考虑，实际收益率就是债券的投资收益率。P_0 是投资额，投资 P_0 后每期可得票面收益 P_NR_N，期满可得一次性还本 P_N。在收益率为 R_0 的条件下，票面收益现值为

$\sum_{i=1}^{n}\frac{P_NR_N}{(1+R_0)^i}$，还本的现值为 $\frac{P_N}{(1+R_0)^n}$，则可用下列方程式

求实际收益率 R_0。

$$P_0=\sum_{i=1}^{n_0}\frac{P_N R_N}{(1+R_0)^i}+\frac{P_N}{(1+R_0)^{n_0}} \tag{1—89}$$

实际生活中，n_0 不是整数，通过对当期利息的适当分割补偿可使债券成交期调整到某次定期付息期之后，使 n_0 为整数以便使计算略为方便一些。尽管如此，用公式 1—89 来求解 R_0，仍需用假定利率代入公式试算，经过几次试算后，再用推值法求出正确的结果。

［例 110］ 某公司债券每年 7 月 1 日付息，1993 年 7 月 1 日还本。1990 年 7 月该 1000 元面值的债券市场售出价 886 元。求 1990 年 7 月购入该债券不再售出的到期实际收益率。该债券的名义收益率为 10%。

解：该债券还有三期票息，每期 100 元。

$$P_0=\frac{P_N R_N[1-(1+R_0)^{-n_0}]}{R_0}+\frac{P_N}{(1+R_0)^{n_0}}$$

$$886=\frac{100[1-(1+R_0)^{-3}]}{R_0}+\frac{1000}{(1+R_0)^3}$$

假定 $R_0=0.14$，代入上式，得：907.135，说明 R 低估。

假定 $R_0=0.16$，代入上式，得：865.247，说明 R 高估。

R_0 提高 0.02，投资 P_0 降低 41.888，则：

$$R_0=0.14+\frac{886-907.135}{865.247-907.135}\times 0.02$$

$$=0.14+0.5\times 0.02=0.15$$

公式 1—89 实质上是已知实际收益率或贴现率求债券

价格。用该公式作债券投资决策分析时，可先设定一个收益率作为期望 R_0，将期望收益率代入公式，得到债券投资的期望价格。如果债券市场价格小于期望价格，说明实际收益率能超过期望收益率，则投资可行，即债券可以买进。如果市场价格大于期望价格，说明实际收益率小于期望收益率，则投资不可行，即债券不可以买进，或将手中已有的债券买出。

上述设定期望投资收益率，求出债券期望价格以作投资分析决策的评估方法，也适用于对一次还本付息债券的投资。即把公式 1—86 变型为：

$$P_0=\frac{P_N(1+n\cdot R_N)}{1+n_0R_0}$$ 来求债券的价格。

用公式 1—89 来求定期付息的债券的实际收益率，计算很烦琐。好在该收益率主要用于投资评估，其计算精确度要求不是很高，故可以用下列近似公式来直接计算到期实际收益率。

$$R_0=\frac{P_NR_N+\dfrac{P_N-P_0}{n_0}}{\dfrac{1}{2}(P_N+P_0)} \tag{1—90}$$

[例 111] 用近似公式来求例 110 的实际收益率。

$$解：R_0=\frac{1000\times10\%+\dfrac{1000-886}{3}}{\dfrac{1}{2}(1000+886)}=14.63\%$$

比较例 110 和例 111 的结果，两种方法的计算误差仅 0.37%。但运用公式 1—90，计算要简便得多。

习 题 四

一、掌握下列概念：

净现值、净现值率、费用现值、净年值、费用年值、内部收益率、外部收益率、商品保本储存期、商品保利储存期、债券、债券面值、债券价格、债券卖出价、平价、溢价、折价、债券票面收益、债券名义收益率、债券实际收益率。

二、某机器现价 20 万元，使用期 6 年，残值不计。每年末收入 8 万元，年经营费用 1.5 万元。求：净现值、净现值率、净年值、费用年值、回收期。复利年息率 8%。

三、求下列两个投资方案的净现值；净现值率；投资回收期。比较方案的优差。R=0.05/年。

1、甲方案：投资 35 万元，可用 10 年，每年收益 5 万元。

2、乙方案：投资 25 万元，可用 15 年，每年收益2.7万元。

四、两种机器的原始数据如下，试以预定投资收益率年 10% 分别计算各机器的平均年成本。

型号	购置价	耐用年数	残值	大修时间	大修费用	年操作费
A	80000元	9	10000元	第5年底	30000元	20000元
B	60000元	8	5000元	第4年底	20000元	25000元

五、现有两种同类设备。假定年产量，年运行维护费都相等。现 A 设备可用 12 年，售价 6 万元；B 设备可用 20 年。若年息率 1 分。试计算如欲购买 B 设备，当以何价为合算？

六、某企业现有设备一台。使用该设备的年产量销售收入为 10 万元，每年的生产费用为 6.5 万元，该机系五年前购入，购价 30 万元，估计可用 20 年。现如以 19 万元作价出

让该机，另行购置新机一台，价 44 万元，估计可用 15 年，报废时残值 2 万元。用新机后年收入可增至 16 万元，每年生产费用增至 8.2 万元。如年收益率 10%，问新设备可购置否?

七、某投资方案初始投资 100 万元，第三年底开始有收益 10 万元，以后每年底可收益 20 万元，估计到第 15 年底使用寿命完毕，残值 10 万元，若年息率为 10%，求该方案的外部投资收益率。

八、公司获某项无息贷款 10 万元，4 年后归还，现拟每年存储偿债基金，利息年率 8 厘，4 年到期足敷偿还该项债务。问每年应存还债额。

九、公司发行 5 年期债券 50 万元，每年付息，一次还本。存款利率年息 1 分。问公司每年除付息外，应存储偿债基金多少?假如公司债券的票面利息率分别为 8%， 10%，12%，公司每年的偿债基金各为多少?

十、公司借款 40 万元，分 4 年等额偿还本息，借款年息率 1 分 2 厘，每年复利一次。求每次还债额并细分本息。

十一、公司借款 40 万元，4 年内等额偿还本息，借款年息率 1 分 2 厘。分别按下列条件求每次还债额并细分本息:

1. 每年复利二次，每年还款一次;
2. 每年复利一次，每年还款二次;
3. 每年复利二次，每年还款二次;
4. 每年复利一次，每二年还款一次。

十二、公司借款 40 万元，借期 1988 年 1 月 1 日，最后还款期 1992 年 1 月 1 日，借期 4 年，年息率 12%。1989 年 7 月 1 日还债 10 万元，1991 年 1 月 1 日再还债 20 万元，按单利和每年复利一次，分别求每次还款后的尚欠本金数以及债务期满时的还款数。

十三、某种电冰箱进货价 1000 元，销售价 1300 元，营业税率

3%，销售费用率 5%，保管费每天一元，银行利息率年息 1 分 2 厘，单利计息。求该电冰箱的保本储存期。

十四、某企业欲用还本销售的方式推销产品。该企业的资金利润率年 14%，问销售几年后可以还本。

十五、我国国库券都是单利计息，一次还本付息的。1990 年 6 月 25 日，全国九城市国库券转让行情如下表。请填上表中空格。

1990 年 6 月 25 日九城市国库卷转让行情　票面价格 100 元

卷种		偿还日	偿还额	上海	武汉	重庆	西安	太原	沈阳	长春	哈尔滨	广州
86	售出价(元)	1991年		131.8	128.4	127.0	128.0	126.0				
年券	收益率(%)	7月1日		13.58					15.66	17.36	18.00	16.01
87	售出价(元)	1992年		114.4					110.2	110.5	109.0	110.5
年券	收益率(%)	7月1日		15.43	18.47	19.61	18.65	21.25				
88	售出价(元)	1991年		114.3	111.3	113.5	110.8					112.0
年券	收益率(%)	7月1日		13.51				18.95	15.81	15.71	17.47	

十六、某种公司债券还有四期票息，每期 100 元，票面价格 1000 元，投资者期望获得 16% 的投资收益率。问:购买该公司债券时的市场价格应是多少?

十七、某种债券面值 100 元，名义利息率 10%，购买时还余 5 期票息，市场价格 85 元。投资者期望获得 14% 的实际收益率。问能否达到这样的收益率?

主要参考书目

1、李鸿寿、莫启欧编译:《会计数学》，立信会计图书用品社，1950年版。

2、[世界银行] J· 普赖斯·吉延格编《复利表和贴现表》(第二版)，中国财政经济出版社，1987年版。

3、傅家骥、张吉平、全允桓、蓝伯雄著:《工程师经济分析与决策》，中国科学技术出版社，1989年版。

4、罗世勋编:《工程经济计算方法手册》，四川科学技术出版社，1985年版。

5、饶余庆著:《现代货币银行学》，中国社会科学出版社，1983年版。

6、蔡芷编:《财会数学》，立信会计图书用品社，1987年版。

附表 I　　年金终值系数表

THE AMOUNT OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	1/4%	7/24%	1/3%	5/12%	i / n
1	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1
2	2.0025 000 000	2.0029 166 667	2.0033 333 333	2.0041 666 667	2
3	3.0075 062 500	3.0087 585 069	3.0100 111 111	3.0125 173 611	3
4	4.0150 250 156	4.0175 340 526	4.0200 444 815	4.0250 695 168	4
5	5.0250 625 782	5.0292 518 602	5.0334 446 298	5.0418 406 398	5
6	6.0376 252 346	6.0439 205 115	6.0502 227 785	6.0628 483 091	6
7	7.0527 192 977	7.0615 486 130	7.0703 901 878	7.0881 101 771	7
8	8.0703 510 959	8.0821 447 964	8.0939 581 551	8.1176 439 695	8
9	9.0905 269 737	9.1057 177 188	9.1209 380 156	9.1514 674 860	9
10	10.1132 532 911	10.1322 760 621	10.1513 411 423	10.1895 986 005	10
11	11.1385 364 243	11.1618 285 340	11.1851 789 461	11.2320 552 614	11
12	12.1663 827 654	12.1943 838 672	12.2224 628 759	12.2788 554 916	12
13	13.1967 987 223	13.2299 508 201	13.2632 044 189	13.3300 173 895	13
14	14.2297 907 191	14.2685 381 767	14.3074 151 003	14.3855 591 286	14
15	15.2653 651 959	15.3101 547 464	15.3551 064 839	15.4454 989 583	15
16	16.3035 286 089	16.3548 093 644	16.4062 910 722	16.5098 552 040	16
17	17.3442 874 304	17.4025 108 917	17.4509 778 061	17.5786 462 673	17
18	18.3876 481 490	18.4532 682 151	18.5191 810 655	18.6518 906 268	18
19	19.4336 172 694	19.5070 902 474	19.5809 116 690	19.7296 968 377	19
20	20.4822 013 126	20.5639 859 273	20.6461 813 746	20.8118 135 329	20
21	21.5334 068 158	21.6239 642 196	21.7150 019 792	21.8985 294 226	21
22	22.5872 403 329	22.6870 341 152	22.7873 853 191	22.9897 732 952	22
23	23.6437 084 337	23.7532 046 314	23.8633 432 702	24.0855 640 173	23
24	24.7028 177 048	24.8224 848 116	24.9428 877 477	25.1859 205 340	24
25	25.7645 747 491	25.8948 837 256	26.0260 307 069	26.2908 618 696	25
26	26.8289 861 859	26.9704 104 698	27.1127 841 426	27.4004 071 273	26
27	27.8960 586 514	28.0490 741 670	28.2031 600 897	28.5145 754 904	27
28	28.9657 987 980	29.1308 839 667	29.2971 706 233	29.6333 862 216	28
29	30.0382 132 950	30.2158 490 449	30.3948 278 588	30.7568 586 642	29
30	31.1133 088 283	31.3039 786 046	31.4961 439 516	31.8850 122 419	30
31	32.1910 921 003	32.3952 818 756	32.6011 310 981	33.0178 664 596	31
32	33.2715 698 306	33.4897 081 144	33.7098 015 351	34.1554 409 032	32
33	34.3547 487 551	34.5874 466 047	34.8221 675 402	35.2977 552 403	33
34	35.4406 356 270	35.6883 266 573	35.9382 414 320	36.4448 292 205	34
35	36.5292 372 161	36.7924 176 100	37.5080 355 701	37.5966 826 755	35
36	37.6205 603 091	37.8997 288 281	38.1815 623 554	38.7533 355 200	36
37	38.7146 117 099	39.0102 697 038	39.3088 342 299	39.9148 077 514	37
38	39.8113 982 392	40.1240 496 571	40.4398 636 773	41.0811 194 503	38
39	40.9109 267 348	41.2410 781 353	41.5746 632 229	42.2522 907 814	39
40	42.0132 040 516	42.3613 646 132	42.7132 454 337	43.4283 419 930	40
41	43.1182 370 618	43.4819 185 933	43.8556 229 184	44.6092 934 179	41
42	44.2260 326 544	44.6117 496 059	45.0018 083 282	45.7951 654 738	42
43	45.3365 977 360	45.7418 672 089	46.1518 143 559	46.9859 786 633	43
44	46.4499 392 304	46.8752 809 882	47.3056 537 371	48.1817 535 744	44
45	47.5660 640 785	48.0120 005 578	48.4633 392 296	49.3825 103 810	45
46	48.6849 792 387	49.1520 355 594	49.6248 837 137	50.5882 713 430	46
47	49.8066 916 868	50.2953 956 631	50.7902 999 928	51.7990 558 069	47
48	50.9312 084 160	51.4420 905 672	51.9596 009 928	53.0148 852 061	48
49	52.0585 364 370	52.5921 299 980	53.1327 966 627	54.2357 805 611	49
50	53.1886 827 781	53.7455 237 105	54.3099 089 949	55.4617 629 801	50

年金终值系数表

THE AMOUNT OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	1/4%	7/24%	1/3%	5/12%	i / n
51	54.3216 544 850	54.9022 814 880	55.4909 420 249	56.6928 536 592	51
52	55.4574 586 213	56.0624 131 423	56.6759 118 317	57.9290 738 828	52
53	56.5961 022 678	57.2259 285 140	57.8648 315 378	59.1704 450 240	53
54	57.7375 925 235	58.3928 374 721	59.0577 143 096	60.4169 885 449	54
55	58.8819 365 048	59.5631 499 148	60.2545 733 573	61.6687 259 972	55
56	60.0291 413 461	60.7368 757 687	61.4554 219 351	62.9256 790 222	56
57	61.1792 141 994	61.9140 249 687	62.6602 733 416	64.1878 693 514	57
58	62.3321 622 349	63.0946 075 626	63.8691 409 194	65.4553 188 071	58
59	63.4879 926 405	64.2786 335 013	65.0820 380 558	66.7280 493 021	59
60	64.6467 126 221	65.4661 128 490	66.2989 781 826	68.0060 828 408	60
61	65.8083 294 037	66.6570 556 781	67.5199 747 766	69.2894 415 193	61
62	66.9728 502 272	67.8514 720 905	68.7450 413 592	70.5781 475 257	62
63	68.1402 823 527	69.0493 722 175	69.9741 914 970	71.8722 231 404	63
64	69.3106 330 586	70.2507 662 198	71.2074 388 020	73.1716 907 368	64
65	70.4839 096 413	71.4556 642 879	72.4447 969 314	74.4765 727 815	65
66	71.6601 194 154	72.6640 766 421	73.6862 795 878	75.7868 918 348	66
67	72.8392 697 139	73.8760 135 323	74.9319 005 198	77.1026 705 508	67
68	74.0213 678 882	75.0914 852 384	76.1816 735 215	78.4239 316 780	68
69	75.2064 213 079	76.3105 520 704	77.4356 124 332	79.7506 980 660	69
70	76.3944 373 612	77.5330 743 681	78.6937 311 413	81.0829 926 353	70
71	77.5854 234 546	78.7592 125 016	79.9560 435 785	82.4208 384 379	71
72	78.7793 870 132	79.9889 268 714	81.2225 637 237	83.7642 585 981	72
73	79.9763 354 808	81.2222 279 081	82.4933 056 028	85.1132 763 423	73
74	81.1672 763 195	82.4591 260 729	83.7682 832 882	86.4679 149 937	74
75	82.3792 170 103	83.6996 318 573	85.0475 108 991	87.8281 797 728	75
76	83.5851 650 528	84.9437 557 835	86.3310 026 021	89.1941 487 977	76
77	84.7941 279 654	86.1915 084 045	87.6187 726 108	90.5657 910 844	77
78	86.0061 132 853	87.4429 003 040	88.9108 351 862	91.9431 485 472	78
79	87.2211 285 685	88.6979 420 966	90.2072 046 368	93.3262 449 995	79
80	88.4391 813 900	89.9566 444 277	91.5078 593 189	94.7151 043 537	80
81	89.6602 793 434	91.2190 179 740	92.8129 216 366	96.1097 506 218	81
82	90.8844 300 418	92.4850 734 431	94.1222 980 421	97.5102 079 161	82
83	92.1116 411 169	93.7548 215 739	95.4360 390 356	98.9165 004 490	83
84	93.3419 202 197	95.0282 731 369	36.7541 591 657	100.3285 525 342	84
85	94.5752 750 202	96.3054 389 335	98.0766 730 296	101.4766 885 865	85
86	95.8117 132 078	97.5863 297 971	99.4035 952 730	103.1706 331 222	86
87	97.0512 424 908	98.8709 565 923	100.7349 405 906	104.6005 107 603	87
88	98.2938 705 970	100.1593 302 257	102.0707 237 259	106.0363 462 218	88
89	99.5396 052 735	101.4514 615 955	103.4109 594 716	107.4781 643 310	89
90	100.7884 582 867	102.7473 616 918	104.7556 626 699	108.9259 900 157	90
91	102.0404 254 224	104.0470 414 967	106.1048 482 121	110.3798 483 073	91
92	103.2955 264 860	105.3505 120 344	107.4585 310 395	111.8397 643 421	92
93	104.5537 653 022	106.6577 843 612	108.8167 261 429	113.3057 633 302	93
94	105.8151 497 155	107.9688 695 656	110.1794 485 634	114.7778 707 075	94
95	107.0796 875 897	109.2837 787 685	111.5467 133 920	116.2561 118 354	95
96	108.3473 868 087	110.6025 231 231	112.9185 357 699	117.7405 123 014	96
97	109.6182 552 757	111.9251 138 157	114.2949 308 892	119.2310 977 693	97
98	110.8923 009 139	113.2515 620 643	115.6759 139 921	120.7978 940 101	98
99	112.1695 316 662	114.5818 791 203	117.0615 003 721	122.2309 269 018	99
100	113.4499 554 954	115.9160 762 678	118.4517 053 733	123.7402 224 305	100

年金终值系数表

THE AMOUNT OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	1/2%	7/12%	2/3%	3/4%	i / n
1	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1
2	2.0050 000 000	2.0058 333 333	2.0066 666 667	2.0075 000 000	2
3	3.0150 250 000	3.0175 340 278	3.0200 444 444	3.0225 562 500	3
4	4.0301 001 250	4.0351 363 096	4.0401 780 741	4.0452 254 219	4
5	5.0502 506 256	5.0586 746 047	5.0671 125 946	5.0755 646 125	5
6	6.0755 018 788	6.0881 835 399	6.1008 933 452	6.1136 313 471	6
7	7.71059 793 881	7.1236 979 439	7.1415 659 675	7.1594 835 822	7
8	8.1414 087 851	8.1652 852 486	8.1891 764 074	8.2131 797 091	8
9	9.1821 158 290	9.2128 834 902	9.2437 709 168	9.2747 785 569	9
10	10.2280 264 082	10.2666 253 106	10.3053 960 562	10.3443 393 961	10
11	11.2791 665 402	11.3265 139 582	11.3740 986 966	11.4219 219 416	11
12	12.3355 623 729	12.3925 852 896	12.4499 260 212	12.5075 863 561	12
13	13.3972 401 848	13.4648 753 705	13.5329 255 280	13.6013 932 538	13
14	14.4642 263 857	14.5434 204 768	14.6231 450 316	14.7034 037 032	14
15	15.5365 475 176	15.6282 570 963	15.7206 326 651	15.8136 792 310	15
16	16.6142 302 552	16.7194 219 293	16.8254 368 829	16.9322 818 252	16
17	17.6978 014 065	17.8169 518 906	17.9376 064 621	18.0592 739 389	17
18	18.7857 879 135	18.9208 841 100	19.0571 905 052	19.1947 184 934	18
19	19.8797 168 531	20.0312 559 339	20.1842 384 419	20.3386 788 821	19
20	20.9791 154 373	21.1481 049 269	21.3188 000 315	21.4912 189 738	20
21	22.0840 110 145	22.2714 688 723	22.4609 253 650	22.6524 031 161	21
22	23.1944 310 696	23.4013 857 740	23.6106 648 674	23.8222 961 394	22
23	24.3104 032 250	24.5378 938 577	24.7680 692 999	25.0009 633 605	23
24	25.4319 522 411	25.6810 315 719	25.9331 897 619	26.1884 705 857	24
25	26.5591 150 173	26.8308 375 894	27.1060 776 936	27.2848 841 151	25
26	27.6919 105 924	27.9873 508 087	28.2867 848 783	28.5902 707 459	26
27	28.8303 701 453	29.1506 103 550	29.4753 634 441	29.8046 977 765	27
28	29.9745 219 961	30.3206 555 821	30.6718 658 671	31.0282 330 099	28
29	31.1243 946 060	31.4975 260 730	31.8763 499 730	32.2609 447 574	29
30	32.2800 165 791	32.6812 616 418	33.0888 539 394	33.5029 081 431	30
31	33.4414 166 620	33.8719 023 347	34.3094 462 990	34.7541 736 069	31
32	34.6086 237 453	35.0649 884 316	35.5381 759 410	36.0148 299 090	32
33	35.7816 668 640	36.2740 604 475	36.7750 971 140	37.2849 411 333	33
34	36.9605 751 983	37.4856 591 334	38.0202 644 281	38.5645 781 918	34
35	38.1453 780 743	38.7043 254 784	39.2737 328 576	39.8538 125 282	35
36	39.3361 049 647	39.9301 007 103	40.5355 577 433	41.1527 161 222	36
37	40.5327 854 895	41.1630 262 978	41.8057 947 949	42.2613 614 931	37
38	41.7354 494 170	42.4031 439 512	43.0845 000 935	43.7798 217 043	38
39	42.9441 266 640	43.6504 956 243	44.3717 300 942	45.1081 708 671	39
40	44.1588 472 974	44.9051 235 154	45.6675 416 281	46.4464 816 449	40
41	45.3796 415 338	46.1670 700 692	46.9719 919 056	47.7948 302 572	41
42	46.6065 397 415	47.4363 779 780	48.2851 385 184	49.1532 914 841	42
43	47.8395 724 402	48.7130 901 828	49.6070 394 418	50.5219 411 703	43
44	49.0787 703 024	49.9972 498 756	50.9377 530 381	51.9008 557 290	44
45	50.3241 641 539	51.2889 004 999	52.2773 380 583	53.2901 121 470	45
46	51.5757 849 747	52.5880 857 528	53.6258 536 454	54.6897 879 881	46
47	52.8336 638 996	53.8948 495 863	54.9833 593 364	56.0999 613 980	47
48	54.0978 322 191	55.2092 362 089	56.3499 150 653	57.5207 111 085	48
49	55.3683 213 802	56.5312 900 868	57.7255 811 657	58.9521 164 418	49
50	56.6451 629 871	57.8610 559 456	59.1140 183 735	60.3942 572 151	50

年金终值系数表

THE AMOUNT OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	1/2%	7/12%	2/3%	3/4%	i / n
51	57.9283 888 020	59.1985 787 720	60.5044 878 293	61.8472 142 450	51
52	59.2180 307 460	60.5439 038 148	61.9078 510 815	63.3110 682 518	42
53	60.5141 208 997	61.8970 765 871	63.3205 700 887	64.7859 013 645	53
54	61.8166 915 042	63.2581 428 672	64.7427 072 226	66.2717 956 247	54
55	63.1257 749 618	64.6271 487 006	66.1743 252 708	67.7688 340 919	55
56	64.4414 038 366	66.0041 404 013	67.6154 874 392	69.2771 003 476	56
57	65.7636 108 558	67.3891 645 537	69.0662 572 555	70.7966 786 002	57
58	67.0924 289 100	68.7822 680 136	70.5266 990 712	72.3276 536 897	58
59	68.4278 910 546	70.1834 979 103	71.9968 770 650	73.8701 110 923	59
60	69.7700 305 099	71.5929 016 481	73.4768 562 454	75.4241 369 255	60
61	71.1188 806 624	73.0105 269 077	74.9667 019 537	76.9898 179 525	61
62	72.4744 750 657	74.4364 216 480	76.4664 799 668	78.5672 415 871	62
63	73.8368 474 411	75.8706 341 076	77.9762 564 999	80.1564 958 990	63
64	75.2060 316 783	77.3132 128 066	79.4960 982 099	81.7576 696 183	64
65	76.5820 618 366	78.7642 065 480	81.0260 721 979	83.3708 521 404	65
66	77.9649 721 458	80.2236 644 195	82.5662 460 126	84.9961 335 315	66
67	79.3547 970 066	81.6916 357 953	84.1166 876 527	86.6336 045 329	67
68	80.7515 709 916	83.1681 803 374	85.6774 655 704	88.2833 565 669	68
69	82.1553 288 466	84.6533 179 977	87.2486 486 742	89.9454 817 412	69
70	83.5661 054 908	86.1471 290 194	88.8303 063 320	91.6200 723 543	70
71	84.9839 360 182	87.6496 539 386	90.4225 083 742	93.3072 234 007	71
72	86.4088 556 983	89.1609 435 866	92.0253 250 967	95.0070 275 762	72
73	87.8480 999 768	90.6810 490 909	93.6388 272 640	96.7195 802 830	73
74	89.2801 044 767	92.2100 218 722	95.2630 861 124	98.4449 771 351	74
75	90.7265 049 991	93.7479 136 715	96.8981 733 532	100.1833 144 636	75
76	92.1801 375 241	95.2947 765 013	98.5441 611 755	101.9346 893 221	76
77	93.6410 382 117	96.8506 626 975	100.2011 222 500	013.6991 994 920	77
78	95.1092 434 028	98.4156 248 966	101.8691 297 317	105.4769 434 882	78
79	96.5847 896 198	99.9897 160 418	103.5482 572 632	107.2680 205 644	79
80	98.0677 135 679	101.5729 893 854	105.2385 789 783	109.0725 307 186	80
81	99.5580 521 357	103.1654 984 902	106.9401 695 048	110.8905 746 990	81
82	101.0558 423 964	104.7672 972 313	108.6531 039 690	112.7222 540 092	82
83	102.5611 216 084	106.3784 397 985	110.3774 579 947	114.5676 709 143	83
84	104.0739 272 164	107.9989 806 974	112.1133 077 146	116.4269 284 462	84
85	105.5942 968 525	109.6289 747 514	113.8607 297 660	118.3001 304 095	85
86	107.1222 683 368	111.2684 771 041	115.6198 012 978	120.1873 813 876	86
87	108.6578 796 784	112.9175 432 206	117.3905 999 731	112.0887 867 480	87
88	110.2011 690 768	114.5762 288 894	119.1732 039 730	124.0044 526 486	88
89	111.7521 749 222	116.2445 902 246	120.9676 919 994	125.9344 860 435	89
90	113.3109 357 968	117.9226 836 675	122.7741 432 794	127.8789 946 888	90
91	114.8774 904 758	119.6105 659 889	124.5926 375 680	129.8380 871 490	91
92	116.4518 779 282	121.3082 942 905	126.4232 551 517	131.8118 728 026	92
93	118.0341 373 178	123.0159 260 072	128.2660 768 528	133.8004 618 486	93
94	119.6243 080 044	124.7335 189 089	130.1211 840 318	135.8039 653 125	94
95	121.2224 295 444	126.4611 311 026	131.9886 585 920	137.8224 950 523	95
96	122.8285 416 922	128.1988 210 340	133.8685 829 826	139.8561 637 652	96
97	124.4426 844 006	129.9466 474 900	135.7610 402 025	141.9050 849 934	97
98	126.0648 978 226	131.7046 696 004	137.6661 138 038	143.9693 731 309	98
99	127.6952 223 117	133.4729 468 397	139.5838 878 958	146.0491 434 294	99
100	129.3336 984 233	135.2515 390 296	141.5144 471 485	148.1445 120 051	100

年金终值系数表

THE AMOUNT OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	3%	3 1/24%	4%	4 1/2%	i / n
1	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1
2	2.0300 000 000	2.0350 000 000	2.0400 000 000	2.0450 000 000	2
3	3.0909 000 000	3.1062 250 000	3.1216 000 000	3.1370 250 000	3
4	4.1836 270 000	4.2149 480 750	4.2464 640 000	4.2781 911 250	4
5	5.3091 358 100	5.3624 658 756	5.4163 225 600	5.4707 097 256	5
6	6.4684 098 843	6.5501 521 813	6.6329 754 624	6.7168 916 633	6
7	7.6624 621 808	7.7794 075 076	7.8982 944 809	8.0190 517 881	7
8	8.8923 360 643	9.0516 867 704	9.2142 262 601	9.3800 136 186	8
9	10.1591 061 276	10.3684 958 073	10.5827 953 105	10.8021 142 314	9
10	11.4638 793 115	11.7313 931 606	12.0061 071 230	12.2882 093 718	10
11	12.8077 956 908	13.1419 919 212	13.4863 514 079	13.8411 787 936	11
12	14.1920 295 615	14.6019 616 385	15.0258 054 642	15.4640 318 393	12
13	15.6177 904 484	16.1130 302 958	16.6268 376 828	17.1599 132 721	13
14	17.0863 241 618	17.6769 863 562	18.2919 111 901	18.9321 093 693	14
15	18.5989 138 867	19.2956 808 786	20.0235 876 377	20.7840 542 909	15
16	20.1568 813 033	20.9710 297 094	21.8245 311 432	22.7193 367 340	16
17	21.7615 877 424	22.7050 157 492	23.6975 123 889	24.7417 068 870	17
18	23.4144 353 747	24.4996 913 004	25.6454 128 845	26.8550 836 970	18
19	25.1168 684 359	26.3571 804 960	27.6712 293 998	29.0635 624 633	19
20	26.8703 744 890	28.2796 818 133	29.7780 785 758	31.3714 227 742	20
21	28.6764 857 236	30.2694 706 768	31.9692 917 189	33.7831 367 990	21
22	30.5367 802 954	32.3289 021 505	34.2479 697 876	36.3033 779 550	22
23	32.4528 837 042	34.4604 137 257	36.6178 885 791	38.9370 299 629	23
24	34.4264 702 153	36.6665 282 061	39.0826 041 223	41.6891 963 113	24
25	36.4592 643 218	38.9498 566 933	41.6459 082 872	44.5652 101 453	25
26	38.5530 422 515	41.3131 016 776	44.3117 446 187	47.5706 446 018	26
27	40.7096 335 190	43.7590 602 363	47.0842 144 034	50.7113 236 089	27
28	42.9309 225 246	46.2906 273 446	49.9675 829 796	53.9933 331 713	28
29	45.2188 502 003	48.9107 993 017	52.9662 862 987	57.4230 331 640	29
30	47.5754 157 063	51.6226 772 772	56.0849 377 507	61.0070 696 564	30
31	50.0026 781 775	54.4294 709 819	59.3283 352 607	64.7523 877 909	31
32	52.5027 585 228	57.3345 024 663	62.7014 686 711	68.6662 452 415	32
33	55.0778 412 785	60.3412 100 526	66.2095 274 180	72.7562 262 774	33
34	57.7301 765 169	63.4531 524 044	69.8579 085 147	77.0302 564 599	34
35	60.4620 818 124	66.6740 127 386	73.6522 248 553	81.4966 180 005	35
36	63.2759 442 668	70.0076 031 844	77.5983 138 495	86.1639 658 106	36
37	66.1742 225 948	73.4578 692 959	81.7022 464 035	91.0413 442 720	37
38	69.1594 492 726	77.0288 947 212	85.9703 362 596	96.1382 047 643	38
39	72.2342 327 508	80.7249 060 365	90.4091 497 100	101.4644 239 787	39
40	75.4012 597 333	84.5502 777 478	95.0255 156 984	107.0303 230 577	40
41	78.6632 975 253	88.5095 374 689	99.8265 363 264	112.8456 875 953	41
42	82.0231 964 511	92.6073 712 804	104.8195 977 794	118.9247 885 371	42
43	85.4838 923 446	86.8486 292 752	110.0123 816 906	125.2764 040 213	43
44	89.0484 091 149	101.2383 312 998	115.4128 769 582	131.9138 422 022	44
45	92.7198 613 884	105.7816 728 953	121.0293 920 365	138.8499 651 013	45
46	96.5014 572 300	110.4840 314 466	126.8705 677 180	146.0982 135 309	46
47	100.3965 009 469	115.3509 725 473	132.9453 904 267	153.6726 331 398	47
48	104.4083 959 753	120.3882 565 864	139.2632 060 438	161.5879 061 311	48
49	108.5406 478 546	125.6018 455 669	145.8337 342 855	169.8593 572 045	49
50	112.7968 672 902	130.9979 101 618	152.6670 836 570	178.5030 282 787	50

年金终值系数表

THE AMOUNT OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	3%	3 1/24%	4%	4 1/2%	i / n
51	117.1807 733 089	136.5828 370 176	159.7737 670 032	187.5356 645 512	51
52	121.6961 965 082	142.3632 363 131	167.1647 176 834	196.9747 694 560	52
53	126.3470 824 035	148.3459 495840	174.8513 063 907	206.8386 340 815	53
54	131.1374 948 756	154.5380 578 195	182.8453 586 463	217.1463 726 152	54
55	136.0716 197 218	160.9468 898 431	191.1591 729 922	227.9179 593 829	55
56	141.1537 683 135	167.5800 309 877	199.8055 399 119	299.1742 675 551	56
57	146.3883 813 629	174.4453 320 722	208.7977 615 083	250.9371 095 951	57
58	151.7800 328 038	181.5509 186 948	218.1496 719 687	263.2292 795 269	58
59	157.3334 337 879	188.9052 008 491	227.8756 588 474	276.0745 971 056	59
60	163.0534 368 015	196.5168 828 788	237.9906 852 013	289.4979 539 753	60
61	168.9450 399 056	204.3949 737 795	248.5103 126 094	303.5253 619 042	61
62	175.0133 911 027	212.5487 978 618	259.4507 251 137	318.1840 031 899	62
63	181.2637 928 358	220.9880 057 870	270 8287 541 183	333.5022 833 335	63
64	187.7017 066 209	229.7225 859 895	282.6619 042 830	349.5098 860 835	64
65	194.3327 578 195	238.7628 764 992	294.9683 804 543	366.2378 309 572	65
66	201.1627 405 541	248.1195 771 766	307.7671 156 725	383.7185 333 503	66
67	208.1976 227 707	257.8037 623 778	321.0778 002 994	401.9858 673 511	67
68	215.4435 514 538	267.8268 940 611	334.9209 123 114	421.0752 313 819	68
69	222.9068 579 975	278.2008 353 532	349.3177 488 039	441.0236 167 941	69
70	230.5940 637 374	288.9378 645 906	364.2904 587 560	461.8696 795 498	70
71	238.5118 856 495	300.0506 898 512	379.8620 771 063	483.6538 151 295	71
72	246.6672 422 190	311.5524 639 960	396.0565 601 905	506.4182 368 104	72
73	255.0672 594 856	323.4568 002 359	412.8988 225 981	530.2070 574 668	73
74	263.7192 772 701	335.7777 882 441	430.4147 755 020	555.0663 750 528	74
75	272.6308 555 882	348.5300 108 327	448.6313 665 221	581.0448 619 302	75
76	281.8097 812 559	361.7285 612 118	467.5766 211 830	608.1913 582 171	76
77	291.2640 746 936	375.3890 603 542	487.2796 860 303	636.5599 693 368	77
78	301.0019 969 344	389.5276 779 841	507.7708 734 715	666.2051 679 570	78
79	311.0320 568 424	404.1611 467 136	529.0817 084 104	697.1844 005 151	79
80	321.3630 185 477	419.3067 868 486	551.2449 767 468	729.5576 985 382	80
81	332.0039 091 041	434.9825 243 883	574.2947 758 167	763.3877 949 725	81
82	342.9640 263 772	451.2069 127 419	598.2665 668 494	798.7402 457 462	82
83	354.2529 471 685	467.9991 546 878	623.1972 295 233	835.6835 568 048	83
84	365.8805 355 836	485.3791 251 019	649.1251 187 043	874.2893 168 610	84
85	377.8569 516 511	503.3673 944 805	676.0901 234 524	914.6323 361 198	85
86	390.1926 602 006	521.9852 532 873	704.1337 283 905	956.7907 912 452	86
87	402.8984 400 067	541.2547 371 523	733.2990 775 262	1000.8463 768 512	87
88	415.9853 932 069	561.1986 529 527	763.6310 406 272	1046.8844 638 095	88
89	429.4649 550 031	581.8406 058 060	795.1762 822 523	1094.9942 646 809	89
90	433.3489 036 532	603.2050 270 092	827.9833 335 424	1145.2690 065 916	90
91	457.6493 707 627	625.3172 029 545	862.1026 668 841	1197.8061 118 882	91
92	472.3788 518 856	648.2033 050 580	897.5867 735 595	1252.7073 869 231	92
93	487.5502 174 422	671 8904 207 350	934.4902 445 018	1310.0793 198 347	93
94	503.1767 239 655	696.4065 854 607	972.8698 542 819	1370.0327 842 047	94
95	519.2720 256 844	721.7808 159 518	1012.7876 484 532	1432.6842 594 940	95
96	535.8501 864 550	748.0431 445 101	1054.2960 343 913	1498.1550 511 712	96
97	552.9256 920 486	775.2246 545 680	1097.4678 757 670	1566.5720 284 739	97
98	570.5134 628 101	803.3575 174 779	1142.3665 907 976	1638.0677 697 552	98
99	588.6288 666 944	832.4750 305 896	1189.0612 544 295	1712.7808 198 942	99
100	607.2877 326 952	862.6116 506 602	1237.6237 046 067	1790.8559 562 669	100

年金终值系数表

THE AMOUNT OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	5%	5 1/2%	6%	6 1/2%	i / n
1	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1
2	2.0500 000 000	2.0550 000 000	2.0600 000 000	2.0650 000 000	2
3	3.1525 000 000	3.1680 250 000	3.1836 000 000	3.1992 250 000	3
4	4.3001 250 000	4.3422 663 750	4.3746 160 000	4.4071 746 250	4
5	5.5256 512 500	5.5810 910 256	5.6370 929 600	5.6936 409 756	5
6	6.8019 128 125	6.8880 510 320	6.9753 185 376	7.0637 276 390	6
7	8.1420 084 531	8.2668 938 388	8.3938 376 499	8.5228 699 356	7
8	9.5491 088 758	9.7215 729 999	9.8974 679 088	10.0768 564 814	8
9	11.0265 643 196	11.2562 595 149	11.4913 159 834	11.7318 521 527	9
10	12.5778 925 355	12.8753 537 882	13.1807 949 424	13.4944 225 426	10
11	14.2067 871 623	14.5834 982 466	14.9716 426 389	15.3715 600 079	11
12	15.9171 265 204	16.3855 906 501	16.8699 411 973	17.3707 114 084	12
13	17.7129 828 465	18.2867 981 359	18.8821 376 691	19.4998 976 499	13
14	19.5986 319 888	20.2925 720 334	21.0150 659 292	21.7672 951 472	14
15	21.5785 635 882	22.4086 634 952	23.2759 698 850	24.1821 693 317	15
16	23.6574 917 676	24.6411 399 875	25.6725 280 781	26.7540 103 383	16
17	25.8403 663 560	26.9964 026 868	28.2128 797 628	29.4930 210 103	17
18	28.1323 846 738	29.4812 048 345	30.9056 525 485	32.4100 673 760	18
19	30.5390 039 075	32.1026 711 004	33.7599 917 015	35.5167 217 554	19
20	33.0659 541 029	34.8683 180 110	36.7855 912 035	38.8253 086 695	20
21	35.7192 518 080	37.7860 755 016	39.9927 266 758	42.3489 537 330	21
22	38.5052 143 984	40.8643 096 542	43.3922 902 763	46.1016 357 257	22
23	41.4304 751 184	44.1118 466 851	46.9958 276 929	50.0982 420 478	23
24	44.5091 988 743	47.5379 982 528	50.8155 773 545	54.3546 277 809	24
25	47.7270 988 180	51.1525 881 567	54.8645 119 957	58.8876 785 867	25
26	51.1134 537 589	54.9658 805 053	59.1563 827 155	63.7153 776 948	26
27	54.6691 264 468	58.9891 094 331	63.7057 656 784	68.8568 772 450	27
28	58.4025 827 692	63.2335 104 520	68.5281 116 191	74.3325 742 659	28
29	62.3227 119 076	67.7113 535 268	73.6397 983 162	80.1641 915 932	29
30	66.4388 475 030	72.4354 779 708	79.0581 862 152	86.3748 640 468	30
31	70.7607 898 782	77.4194 292 592	84.8016 773 881	92.9892 302 098	31
32	75.2988 293 721	82.6774 978 685	90.8897 780 314	100.0335 301 735	32
33	80.0637 708 407	88.2247 602 512	97.3431 647 133	107.5357 096 347	33
34	85.0369 593 827	94.0771 220 650	104.1837 545 961	115.5255 307 610	34
35	90.3203 073 518	100.2513 637 786	111.4347 798 719	124.0346 902 605	35
36	95.8363 277 194	106.7651 887 864	119.1208 666 642	133.0969 451 274	36
37	101.6281 388 554	113.6372 741 697	127.2681 186 640	142.7482 465 607	37
38	107.7095 457 982	120.8873 242 490	135.9042 057 839	153.0268 825 871	38
39	114.0950 230 881	128.5361 270 827	145.0584 580 309	163.9736 299 563	39
40	120.7997 742 425	136.6056 140 723	154.7619 656 188	175.6319 159 024	40
41	127.8397 629 546	145.1189 228 463	165.0476 835 559	188.0479 904 360	41
42	135.2371 511 023	154.1004 636 028	175.9505 445 692	201.2711 098 144	42
43	142.9933 386 575	163.5759 891 010	187.5075 772 434	215.3537 319 523	43
44	151.1430 055 903	173.5726 685 015	199.7580 318 780	230.3517 245 292	44
45	159.7001 558 699	184.1191 652 691	212.7435 137 907	246.3245 866 236	45
46	168.6851 636 633	195.2457 193 589	226.5081 246 181	263.3356 847 541	46
47	178.1194 218 465	206.9842 339 236	241.0986 120 952	281.4525 042 631	47
48	188.0253 929 388	219.3683 667 894	256.5645 288 209	300.7469 170 402	48
49	198.4266 625 858	232.4336 269 629	272.9584 005 502	321.2954 666 479	49
50	209.3479 957 151	246.2174 764 458	290.3359 945 832	343.1796 719 800	50

年金终值系数表

THE AMOUNT OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	5%	5 1/2%	6%	6 1/2%	i / n
51	220.8153 955 008	260 7594 376 503	308.7560 588 582	366.4863 506 587	51
52	232.8561 652 759	276.1012 067 211	328.2814 223 897	391.3079 634 515	52
53	245.4989 735 397	292.2867 730 908	348.9783 077 331	417.7429 810 758	53
54	258.7739 222 166	309.3625 456 108	370.9170 061 970	445.8962 748 458	54
55	272.7126 183 275	327.3774 856 193	394.1720 265 689	475.8795 327 107	55
56	287.3432 492 438	364.3832 473 284	418.8223 481 630	507.8117 023 369	56
57	302.7156 617 060	366.4343 259 315	444.9516 890 528	541.8194 629 888	57
58	318.8514 447 913	387.5882 138 577	472.6487 903 959	578.0377 280 831	58
59	335.7940 170 309	409.9055 656 199	502.0077 178 197	616.6101 804 085	59
60	353.5837 178 825	433.4503 717 290	533.1281 808 889	657.6898 421 351	60
61	372.2629 037 766	458.2901 421 741	566.1158 717 422	701.4396 818 738	61
62	391.8760 489 654	484.4960 999 936	601.0828 240 467	748.0332 611 956	62
63	412.4698 514 137	512.1433 854 933	638.1477 934 895	797,6554 231 734	63
64	434.0933 439 844	541.3112 716 954	677.4366 610 989	850.5030 256 796	64
65	456.7980 111 836	572.0833 916 387	719.0828 607 648	906.7857 223 488	65
66	480.6379 117 428	604.5479 781 788	763.2278 324 107	966.7267 943 015	66
67	505.6698 073 299	638.7981 169 786	810.0215 023 554	1030.5640 359 311	67
68	531.9532 976 964	674.9320 134 125	859.6227 924 967	1098.5506 982 666	68
69	559.5509 625 812	713.0532 741 502	912.2001 600 465	1170.9564 936 539	69
70	588.5285 107 103	753.2712 042 284	967.9321 696 493	1248.0686 657 414	70
71	618.9549 362 458	795.7011 204 610	1027.0080 998 283	1330.1931 290 146	71
72	650.9026 830 581	840.4646 820 863	1089.6285 858 180	1417.6556 824 006	72
73	684.4478 172 110	887.6902 396 011	1156.0063 009 670	1510.8033 017 566	73
74	719.6702 080 715	937.5132 027 791	1226.3666 790 250	1610.0055 163 708	74
75	756.6537 184 751	990.0764 289 320	1300.9486 797 666	1715.6558 749 349	75
76	795.4864 043 989	1045.5306 325 233	1380.0056 005 525	1828.1735 068 057	76
77	836.2607 246 188	1104.0348 173 120	1463.8059 365 857	1948.0047 847 480	77
78	879.0737 608 497	1165.7567 322 642	1552.6342 927 808	2075.6250 957 566	78
79	924.0274 488 922	1230.8733 525 387	1646.7923 503 477	2211.5407 269 808	79
80	971.2283 213 368	1299.5713 869 284	1746.5998 913 686	2356.2908 742 364	80
81	1020.7902 624 037	1372.0478 132 094	1852.3958 848 507	2510.4497 810 598	81
82	1072.8297 755 239	1448.5104 429 359	1964.5396 379 417	2674.6290 168 287	82
83	1127.4712 643 001	1529.1785 172 974	2083.4120 162 182	2849.4799 029 226	83
84	1184.8448 275 151	1614.2833 357 488	2209.4167 371 913	3035.6960 966 126	84
85	1245.0870 688 908	1704.0689 192 150	2342.9817 414 228	3234.0163 428 924	85
86	1308.3414 223 354	1798.7927 097 718	2484.5606 459 081	3445.2274 051 804	86
87	1374.7584 934 521	1898.7263 088 092	2634.6342 846 626	3670.1671 865 171	87
88	1444.4964 181 247	2004.1562 577 937	2793.7123 417 424	3909.7280 536 407	88
89	1517.7212 390 310	2115.3848 498 624	2962.3350 822 469	4164.8603 771 274	89
90	1594 6073 009 825	2232.7310 166 048	3141.0751 871 817	4136.5763 016 406	90
91	1675.3376 660 316	2356.5312 225 181	3330.5396 984 127	4725.9537 612 473	91
92	1760.1045 493 332	2487.1404 397 566	3531.3720 803 174	5034.1407 557 284	92
93	1849.1097 767 999	2624.9331 639 432	3744.2544 051 365	5362.3599 048 507	93
94	1942.5652 656 399	2770.3044 879 601	3969.9096 694 446	5711.9132 986 660	94
95	2040.6935 289 219	2923.6712 347 979	4209.1042 496 113	6084.1876 630 793	95
96	2143.7282 053 680	3085.4731 527 118	4462.6505 045 880	6480.6598 611 794	96
97	2251.9146 156 364	3256.1741 761 109	4731.4095 348 633	6902.9027 521 561	97
98	2356.5103 464 182	3436.2637 557 970	5016.2941 069 551	7352.5914 310 462	98
99	2484.7858 637 391	3626.2582 623 659	5318.2717 533 724	7831.5098 740 642	99
100	2610.0251 569 260	3826.7024 667 960	5638.3680 585·747	8341.5580 158 784	100

附表 II

年金现值系数表

PRESENT VALUE OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	7/8%	1%	1 1/8%	1 1/4%	i / n
1	0.9913 258 984	0.9900 990 099	0.9888 751 545	0.9876 543 210	1
2	1.9740 529 352	1.9703 950 593	1.9667 492 257	1.9631 153 788	2
3	2.9482 556 978	2.9409 852 072	2.9337 445 990	2.9265 337 074	3
4	3.9140 081 267	3.9019 655 517	3.8899 822 981	3.8780 579 826	4
5	4.8713 835 209	4.8534 312 393	4.8355 820 006	4.8178 350 446	5
6	5.8201 545 437	5.7954 764 746	5.7706 620 525	5.7460 099 206	6
7	6.7612 932 279	6.7281 945 293	6.6963 394 833	6.6627 258 475	7
8	7.6939 709 818	7.6516 777 518	7.6097 300 206	7.5681 242 938	8
9	8.6185 585 941	8.5660 175 760	8.5139 481 044	8.4623 499 815	9
10	9.5351 262 395	9.4713 045 307	9.4081 039 018	9.3455 259 077	10
11	10.4437 434 841	10.3676 282 482	10.2923 183 207	10.2178 033 656	11
12	11.3444 792 903	11.2550 774 735	11.1666 930 242	11.0793 119 660	12
13	12.2374 020 226	12.1337 400 728	12.0313 404 442	11.9301 846 578	13
14	13.1225 794 524	13.0037 030 423	12.8863 687 952	12.7705 527 485	14
15	14.0000 787 632	13.8650 525 172	13.7318 850 880	13.6005 459 244	15
16	14.8699 665 558	14.7178 737 794	14.5679 951 426	14.4202 922 710	16
17	15.7323 088 534	15.5622 512 667	15.3948 036 021	15.2299 182 924	17
18	16.5817 711 062	16.3982 685 809	16.2124 139 452	16.0295 489 307	18
19	17.4346 181 969	17.2260 084 959	17.0209 284 996	16.8193 075 859	19
20	18.2747 144 455	18.0455 529 663	17.8204 484 545	17.5993 161 342	20
21	19.1075 236 139	18.8569 831 349	18.6110 738 734	18.3696 949 474	21
22	19.9331 089 110	19.6603 793 415	19.3929 037 067	19.1305 629 110	22
23	20.7515 329 972	20.4558 211 302	20.1660 358 039	19.8820 374 430	23
24	21.5628 579 898	21.2433 872 576	20.9305 669 260	20.6242 345 116	24
25	22.3671 454 670	22.0231 557 006	21.6865 927 575	21.3572 685 534	25
26	23.1644 564 728	22.7952 036 640	22.4342 079 184	22.0812 529 910	26
27	23.9548 515 220	23.5596 075 881	23.1735 059 762	22.7962 992 504	27
28	24.7383 906 042	24.3164 431 565	23.9045 794 573	23.5025 177 782	28
29	25.5151 331 888	25.0657 853 035	24.6275 198 589	24.2000 175 587	29
30	26.2851 382 293	25.8077 082 213	25.3424 176 602	24.8889 062 308	30
31	27.0484 641 679	26.5422 853 676	26.0493 623 339	25.5692 901 045	31
32	27.8051 689 396	27.2695 894 729	26.7484 423 574	26.2412 741 773	32
33	28.5553 099 773	27.9896 925 474	27.4397 452 236	26.9049 621 504	33
34	29.2989 442 155	28.7026 658 885	28.1233 574 523	27.5604 564 448	34
35	30.0361 280 946	29.4085 800 876	28.7993 646 005	28.2078 582 171	35
36	30.7669 175 659	30.1075 050 373	29.4678 512 737	28.8472 673 749	36
37	31.4913 680 951	30.7995 099 379	30.1289 011 359	29.4787 825 925	37
38	32.2095 346 668	31.4846 633 048	30.7825 868 206	30.1025 013 259	38
39	32.9214 717 886	32.1630 329 751	31.4290 204 406	30.7185 198 281	39
40	33.6272 334 955	32.8346 861 140	32.0682 525 989	31.3269 331 635	40
41	34.3268 733 537	33.4996 892 217	32.7003 733 982	31.9278 352 233	41
42	35.0204 444 646	34.1581 081 403	33.3254 619 512	32.5213 187 390	42
43	35.7079 994 693	34.8100 080 597	33.9435 964 907	33.1074 752 978	43
44	36.3895 905 519	35.4554 535 245	34.5548 543 789	33.6863 953 558	44
45	37.0652 694 443	36.0945 084 401	35.1593 121 176	34.2581 682 527	45
46	37.7350 874 293	36.7272 360 793	35.7570 453 573	34.8228 822 249	46
47	38.3990 953 450	37.3536 990 884	36.3481 289 071	35.3806 244 196	47
48	39.0573 435 886	37.9739 594 935	36.9326 367 438	35.9314 809 083	48
49	39.7098 821 201	38.5880 787 064	37.5106 420 210	36.4755 366 995	49
50	40.3567 604 660	39.1961 175 311	38.0822 170 789	37.0128 757 526	50

年金现值系数表

PRESENT VALUE OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	7/8%	1%	1 1/8%	1 1/4%	i / n
51	40.9980 277 234	39.7881 361 694	38.6474 334 525	37.5435 809 902	51
52	41.6337 325 635	40.3941 942 271	39.2063 618 814	38.0677 343 114	52
53	42.2639 232 352	40.9843 507 199	39.7590 723 178	38.5854 166 038	53
54	42.8886 475 689	41.5686 640 791	40.3056 339 360	39.0967 077 568	54
55	43.5079 529 804	42.1471 921 576	40.8461 151 407	39.6016 866 734	55
56	44.1218 864 737	42.7199 922 352	41.3805 835 755	40.1004 312 824	56
57	44.7304 946 456	43.2871 210 250	41.9091 061 315	40.5930 185 505	57
58	45.3338 236 883	43.8486 346 782	42.4317 489 557	41.0795 244 943	58
59	45.9319 193 936	44.4045 887 903	42.9485 774 593	41.5600 241 919	59
60	46.5248 271 565	44.9550 384 062	43.4596 563 256	42.0345 917 945	60
61	47.1125 919 762	45.5000 380 260	43.9650 495 186	42.5033 005 378	61
62	47.6952 584 646	46.0393 416 099	44.4648 202 903	42.9662 227 534	62
63	48.2728 708 447	46.5739 025 840	44.5990 311 894	43.4234 298 799	63
64	48.8454 729 564	47.1028 738 456	45.4477 440 686	43.8749 924 739	64
65	49.4131 082 591	47.6266 077 679	45.9310 200 926	44.3209 802 212	65
66	49.9758 198 355	48.1451 562 058	46.4089 197 455	44.7614 619 468	66
67	50.5336 503 946	48.6585 705 008	46.8815 028 385	45.1965 056 265	67
68	51.0866 422 747	49.1669 014 860	47.3488 285 177	45.6261 783 966	68
69	51.6348 374 470	49.6701 994 911	47.8109 552 709	46.0505 465 645	69
70	52.1782 775 187	50.1685 143 476	48.2679 409 354	46.4696 756 193	70
71	52.7170 037 360	50.6618 953 936	48.7198 427 050	46.8836 302 412	71
72	53.2510 569 874	51.1503 914 789	49.1667 171 372	47.2924 743 123	72
73	53.7804 778 066	51.6340 509 692	49.6086 201 604	47.6962 709 258	73
74	54.3053 063 758	52.1129 217 516	50.0456 070 807	48.0950 823 958	74
75	54.8255 825 287	52.5870 512 393	50.4777 325 891	48.4889 702 675	75
76	55.3413 457 533	53.0564 863 755	50.9050 507 679	48.8779 953 259	76
77	55.8526 351 954	53.5212 736 391	51.3276 150 981	49.2622 176 058	77
78	56.3594 896 608	53.9814 590 486	51.7454 784 653	49.6416 964 008	78
79	56.8619 476 192	54.4370 881 670	52.1586 931 672	55.0164 902 724	79
80	57.3600 472 061	54.8882 061 059	52.5673 109 194	50.3866 570 592	80
81	57.8538 262 266	55.3348 575 306	52.9713 828 622	50.7522 538 856	81
82	58.3433 221 578	55.7770 866 639	53.3709 595 670	51.1133 371 710	82
83	58.8285 721 514	56.2149 372 910	53.7660 910 428	51.4699 626 380	83
84	59.3096 130 374	56.6484 527 634	54.1568 267 420	51.8221 853 215	84
85	59.7864 813 258	57.0776 760 034	54.5432 155 668	52.1700 595 768	85
86	60.2592 132 102	57.5026 495 083	54.9253 058 757	52.5136 390 882	86
87	60.7278 445 702	57.9234 153 547	55.3031 454 890	52.8529 768 772	87
88	61.1924 109 742	58.3400 152 027	55.6767 816 949	53.1881 253 108	88
89	61.6529 476 819	58.7524 902 997	56.0462 612 558	53.5191 361 095	89
90	62.1094 896 475	59.1608 814 849	56.4116 304 136	53.8460 603 550	90
91	62.5620 715 217	59.5652 291 929	56.7729 348 961	54.1689 484 988	91
92	63.0107 276 547	59.9655 734 584	57.1302 199 219	54.4878 503 692	92
93	63.4554 920 989	60.3619 539 192	57.4835 302 071	54.8028 151 794	93
94	63.8963 986 110	60.7544 098 210	57.8329 099 699	55.1138 915 352	94
95	64.3334 806 553	61.1429 800 207	58.1784 029 369	55.4211 274 422	95
96	64.7667 714 055	61.5277 029 908	58.5200 523 480	55.7245 703 133	96
97	65.1963 037 477	61.9086 168 226	58.8579 009 622	56.0242 669 761	97
98	65.6221 102 827	62.2857 592 303	59.1919 910 627	56.3202 636 801	98
99	66.0442 233 286	62.6591 675 548	59.5223 644 625	56.6126 061 038	99
100	66.4626 749 230	63.0288 787 671	59.8490 625 093	56.9013 393 618	100

年金现值系数表

PRESENT VALUE OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTERET

n \ i	2%	2 1/4%	2 1/2%	2 3/4%	i / n
1	0.9803 921 569	0.9779 951 100	0.9756 097 561	0.9732 360 097	1
2	1.9415 609 381	1.9344 695 453	1.9274 241 523	1.9204 243 404	2
3	2.8838 832 726	2.8698 968 658	2.8560 235 632	2.8422 621 317	3
4	3.8077 286 987	3.7847 402 110	3.7619 742 080	3.7394 278 654	4
5	4.7134 595 085	4.6794 525 291	4.6458 284 956	4.6125 818 642	5
6	5.6014 308 907	5.5544 768 011	5.5081 253 616	5.4628 667 778	6
7	6.4719 910 693	6.4102 462 602	6.3493 905 967	6.2894 080 562	7
8	7.3254 814 405	7.2471 846 066	7.1701 371 675	7.0943 144 100	8
9	8.1622 367 064	8.0657 062 167	7.9708 655 292	7.8776 782 579	9
10	8.9825 850 062	8.8662 163 489	8.7526 639 310	8.6400 761 634	10
11	9.7868 480 453	9.6491 113 436	9.5142 087 131	9.3820 692 588	11
12	10.5753 412 209	10.4147 788 202	10.2577 645 982	10.1042 036 582	12
13	11.3483 737 460	11.1635 978 681	10.9831 849 738	10.8070 108 595	13
14	12.1062 487 706	11.8959 392 354	11.6909 121 696	11.4910 081 358	14
15	12.8492 635 006	12.6121 655 113	12.3813 777 264	12.1566 989 156	15
16	13.5777 093 143	13.3126 313 069	13.0550 026 599	12.8045 731 539	16
17	14.2918 718 768	13.9976 834 298	13.7121 977 170	13.4351 076 923	17
18	14.9920 312 517	14.6676 610 560	14.3533 636 264	14.0487 666 106	18
19	15.6784 620 115	15.3228 958 983	14.9788 913 428	14.6460 015 675	19
20	16.3514 333 446	15.9637 123 700	15.5891 622 856	15.2272 521 338	20
21	17.0112 091 614	16.5904 277 457	16.1845 485 714	15.7929 461 156	21
22	17.6580 481 974	17.2033 523 185	16.7654 132 404	16.3434 998 692	22
23	18.2922 041 151	17.8027 895 536	17.3321 104 784	16.8793 186 075	23
24	18.9139 256 031	18.3890 362 382	17.8849 858 326	17.4007 966 983	24
25	19.5234 564 736	18.9623 826 291	18.4243 764 220	17.9083 179 545	25
26	20.1210 357 584	19.5231 125 957	18.9506 111 434	18.4022 559 168	26
27	20.7068 978 024	20.0715 037 610	19.4640 108 717	18.8829 741 283	27
28	21.2812 723 553	20.6078 276 392	19.9648 886 553	19.3508 264 022	28
29	21.8443 846 620	21.1323 497 693	20.4535 499 076	19.8061 570 825	29
30	22.3964 555 510	21.6453 298 478	20.9302 925 928	20.2493 012 968	30
31	22.9377 015 206	22.1470 218 560	21.3954 074 076	20.6805 852 037	31
32	23.4683 348 241	22.6376 741 868	21.8491 779 586	21.1003 262 323	32
33	23.9885 635 530	23.1175 297 670	22.2918 809 352	21.5088 333 161	33
34	24.4985 917 187	23.5868 261 780	22.7237 862 783	21.9064 071 203	34
35	24.9986 193 320	24.0457 957 731	23.1451 573 447	22.2933 402 631	35
36	25.4888 424 824	24.4946 657 928	23.5562 510 680	22.6699 175 310	36
37	25.9694 534 141	24.9336 584 771	23.9573 181 151	23.0364 160 885	37
38	26.4406 406 021	25.3629 911 756	24.3486 030 391	23.3931 056 823	38
39	26.9025 888 256	25.7828 764 554	24.7303 444 284	23.7402 488 392	39
40	27.3554 792 407	26.1935 222 057	25.1027 750 521	24.0781 010 600	40
41	27.7994 894 517	26.5951 317 416	25.4661 220 020	24.4069 110 073	41
42	28.2347 935 801	26.9879 039 037	25.8206 068 313	24.7269 206 884	42
43	28.6615 623 334	27.3720 331 577	26.1664 456 890	25.0383 656 335	43
44	29.0799 630 720	27.7477 096 897	26.5038 494 527	25.3414 750 691	44
45	29.4901 598 745	28.1151 195 009	26.8330 238 563	25.6364 720 867	45
46	29.8923 136 025	28.4744 444 997	27.1541 696 159	25.9235 738 070	46
47	30.2865 819 632	28.8258 625 913	27.4674 825 521	26.2029 915 397	47
48	30.6731 195 718	29.1695 477 666	27.7731 537 094	26.4749 309 389	48
49	31.0520 780 115	29.5056 701 874	28.0713 694 726	26.7395 921 546	49
50	31.4236 058 937	29.8343 962 713	28.3623 116 805	26.9971 699 802	50

年金现值系数表

PRESENT VALUE OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	2%	2 1/4%	2 1/2%	2 3/4%	i / n
51	31,7878 489 153	30.1558 887 739	28.6461 577 371	27.2478 539 953	51
52	32.1449 499 170	30.4703 068 693	28.9230 807 191	27.4918 287 059	52
53	32.4950 489 382	30.7778 062 292	29.1932 494 821	27.7292 736 797	53
54	32.8382 832 728	31.0785 390 994	29.4568 287 630	27.9603 636 785	54
55	33.1747 875 223	31.3726 543 760	29.7139 792 810	28.1852 687 869	55
56	33.5046 936 494	31.6602 976 782	29.9648 578 351	28.4041 545 371	56
57	33.8281 310 288	31.9416 114 212	30.2096 174 001	28.6171 820 312	57
58	34.1452 264 988	32.2167 348 863	30.4484 072 196	28.8245 080 596	58
59	34.4561 044 106	32.4858 042 898	30.6813 728 972	29.0262 852 162	59
60	34.7608 866 770	32.7489 528 506	30.9086 564 851	29.2226 620 109	60
61	35.0596 928 206	33.0063 108 564	31.1303 965 708	29.4137 829 789	61
62	35.3526 400 202	33.2580 057 275	31.3467 283 617	29.5997 867 873	62
63	35.6398 431 571	33.5041 620 807	31.5577 837 676	29.7808 163 380	63
64	35.9214 148 599	33.7449 017 904	31.7636 914 805	29.9569 988 691	64
65	36.1974 655 489	33.9803 440 493	31.9645 770 542	30.1284 660 527	65
66	36.4681 034 793	34.2106 054 272	32.1605 629 797	30.2953 440 902	66
67	36.7334 347 837	34.4357 999 288	32.3517 687 607	30.4577 558 055	67
68	36.9935 635 134	34.6560 390 501	32.5383 109 860	30.6158 207 353	68
69	37.2485 916 798	34.8714 318 339	32.7203 034 010	30.7696 552 168	69
70	37.4986 192 939	35.0820 849 231	32.8978 569 766	30.9193 724 738	70
71	37.7437 444 058	35.2881 026 143	33.0710 799 772	31.0650 826 996	71
72	37.9840 631 429	35.4895 869 088	33.2400 780 265	31.2068 931 383	72
73	38.2196 697 480	35.6866 375 637	33.4049 541 722	31.3449 081 638	73
74	38.4506 566 157	35.8793 521 405	33.5658 089 485	31.4792 293 565	74
75	38.6771 143 291	36.0678 260 543	33.7227 404 375	31.6099 555 781	75
76	38.8991 316 952	36.2521 526 203	33.8758 443 293	31.7371 830 443	76
77	39.1167 957 796	36.4324 231 006	34.0252 139 798	31.8610 053 960	77
78	39.3301 919 408	36.6087 267 487	34.1709 404 681	31.9815 137 674	78
79	39.5394 038 635	36.7811 508 545	34.3131 126 518	32.0987 968 539	79
80	39.7445 135 917	36.9497 807 868	34.4518 172 213	32.2129 409 779	80
81	39.9456 015 605	37.1147 000 360	34.5871 387 525	32.3240 301 479	81
82	40.1427 466 279	37.2759 902 552	34.7191 597 585	32.4321 461 294	82
83	40.3360 261 058	37.4337 313 010	34.8479 607 400	32.5373 684 957	83
84	40.5255 157 900	37.5880 012 723	34.9736 202 342	32.6397 746 917	84
85	40.7112 899 902	37.7388 765 500	35.0962 148 626	32.7394 400 893	85
86	40.8934 215 590	37.8864 318 337	35.2158 193 781	32.8364 380 431	86
87	41.0719 819 206	38.0307 401 797	35.3325 067 104	32.9308 399 446	87
88	41.2470 410 986	38.1718 730 363	35.4463 480 101	33.0227 152 746	88
89	41.4186 677 437	38.3099 002 800	35.5574 126 928	33.1121 316 541	89
90	41.5869 291 605	38.4448 902 494	35.6657 684 808	33.1991 548 945	90
91	41.7518 913 339	38.5769 097 794	35.7714 814 447	33.2838 490 457	91
92	41.9136 189 548	38.7060 242 341	35.8746 160 436	33.3662 764 435	92
93	42.0721 754 458	38.8322 975 395	35.9752 351 645	33.4464 977 552	93
94	42.2276 229 861	38.9557 922 147	36.0734 001 605	33.5245 720 246	94
95	42.3800 225 354	39.0765 694 031	36.1691 708 882	33.6005 567 149	95
96	42.5294 338 583	39.1946 889 028	36.2626 057 446	33.6745 077 517	96
97	42.6759 155 473	39.3102 091 959	36.3537 617 021	33.7464 795 637	97
98	42.8195 250 464	39.4231 874 776	36.4426 943 435	33.8165 251 229	
99	42.9603 186 729	39.5336 796 847	36.5294 578 961	33.8846 959 833	99
100	43.0983 516 401	39.6417 405 229	36.6141 052 64[illegible]	33.9510 423 195	100

年金现值系数表

PRESENT VALUE OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	5%	5 1/2%	6%	6 1/2%	i / n
1	0.9523 809 524	0.9478 672 986	0.9433 962 264	0.9389 671 362	1
2	1.8594 104 308	1.8463 197 143	1.8333 926 664	1.8206 264 189	2
3	2.7232 480 294	2.6979 333 785	2.6730 119 495	2.6484 755 107	3
4	3.5459 505 042	3.5051 501 218	3.4651 056 127	3.4257 986 016	4
5	4.3294 766 706	4.2702 844 756	4.2123 637 856	4.1556 794 381	5
6	5.0756 920 673	4.9955 303 086	4.9173 243 260	4.8410 135 569	6
7	5.7863 733 974	5.6829 671 172	5.5823 814 396	5.4845 197 718	7
8	6.4632 127 594	6.3345 659 879	6.0297 938 110	6.0887 509 594	8
9	7.1078 216 756	6.9521 952 492	6.8016 922 745	6.6561 041 872	9
10	7.7117 349 292	7.5376 258 286	7.3600 870 514	7.1888 302 228	10
11	8.3064 142 183	8.0925 363 304	7.8868 745 768	7.6890 424 627	11
12	8.8632 516 364	8.6185 178 487	8.3838 439 404	8.1587 253 171	12
13	9.3935 729 871	9.1170 785 296	8.8526 829 626	8.5997 420 818	13
14	9.8986 409 401	9.5896 478 954	9.2949 839 270	9.0138 423 303	14
15	10.2796 580 382	10.0375 809 435	9.7122 489 877	9.4026 688 547	15
16	10.8377 695 602	10.4621 620 317	10.1058 952 715	9.7677 641 828	16
17	11.2740 662 478	10.8646 085 609	10.4772 596 901	10.1105 766 975	17
18	11.6895 869 027	11.2460 744 653	10.8276 034 812	10.4324 663 826	18
19	12.0853 208 597	11.6076 535 216	11.1581 164 917	10.7347 102 184	19
20	12.4622 103 425	11.9503 824 849	11.4699 212 186	11.0185 072 474	20
21	12.8211 527 072	12.2752 440 615	11.7640 766 213	11.2849 833 309	21
22	13.1630 025 783	12.5831 697 266	12.0415 817 182	11.5351 956 158	22
23	13.4885 738 841	12.8750 423 949	12.3033 789 794	11.7701 367 285	23
24	13.7986 417 943	13.1516 989 525	12.5503 575 278	11.9907 387 122	24
25	14.0939 445 660	13.4139 326 564	12.7833 561 583	12.1978 767 251	25
26	14.3751 853 010	13.6624 954 089	13.0031 661 870	12.3923 725 118	26
27	14.6430 336 200	13.8980 999 136	13.2105 341 387	12.5749 976 637	27
28	14.8981 272 571	14.1214 217 191	13.4061 642 818	12.7464 766 795	28
29	15.1410 735 782	14.3331 011 555	13.5901 210 206	12.9074 898 399	29
30	15.3742 510 269	14.5337 451 711	13.7648 311 515	13.0586 759 060	30
31	15.5928 105 018	14.7239 290 722	13.9290 859 920	13.2006 346 535	31
32	15.8026 766 684	14.9041 981 727	14.0840 433 887	13.3339 292 521	32
33	16.8026 766 080	15.0750 693 580	14.2320 196 119	13.4590 884 997	33
34	16.1929 040 076	15.2370 325 668	14.3681 411 433	13.5766 089 199	34
35	16.3741 942 929	15.3905 521 960	14.4982 463 616	13.6869 567 323	35
36	16.5468 517 076	15.5360 684 322	14.6209 871 336	13.7905 697 017	36
37	16.7112 873 405	15.6739 985 140	14.7367 803 147	13.8878 588 748	37
38	16.8678 927 053	15.8047 379 279	14.8460 191 648	13.9792 192 111	38
39	17.0170 406 717	15.9286 615 431	14.9490 746 838	14.0649 861 137	39
40	17.1590 863 540	16.0461 246 854	15.0462 968 715	14.1455 268 673	40
41	17.2942 679 562	16.1574 641 568	15.1380 159 165	14.2211 519 881	41
42	17.4232 075 773	16.2629 992 007	15.2245 433 175	14.2921 614 912	42
43	17.5459 119 784	16.3630 324 177	15.3061 729 410	14.3588 370 809	43
44	17.6627 733 128	16.4578 506 329	15.3831 820 198	14.4214 432 685	44
45	17.7740 698 217	16.5477 257 184	15.4558 320 942	14.4802 284 211	45
46	17.8800 664 968	16.6329 153 729	15.5243 699 002	14.5354 257 475	46
47	17.9810 157 113	16.7136 638 606	15.5890 282 077	14.5872 542 230	47
48	18.0771 578 203	16.7902 027 114	15.6500 266 110	14.6359 194 582	48
49	18.1687 217 336	16.8627 513 853	15.7075 722 746	14.6816 145 148	49
50	18.2559 254 606	16.9315 179 007	15.7616 606 364	14.7245 206 711	50

年金现值系数表

PRESENT VALUE OF 1 PER ANNUM AT COMPOUND INTEREST

n \ i	5%	5 1/2	6%	6 1/2%	i / n
51	18.3389 766 291	16.9966 994 320	15.8130 760 721	14.7648 081 419	51
52	18.4180 729 801	17.0584 828 739	15.8613 925 208	14.8026 367 530	52
53	18.4934 028 382	17.1170 453 781	15.9069 740 762	14.8381 565 756	53
54	18.5651 455 602	17.1725 548 608	15.9499 755 436	14.8715 085 216	54
55	18.6334 719 621	17.2251 704 841	15.9905 429 657	14.9028 249 030	55
56	18.6985 447 258	17.2750 431 129	16.0288 141 186	14.9322 299 558	56
57	18.7605 187 865	17.3223 157 468	16.0649 189 798	14.9598 403 341	57
58	18.8195 417 014	17.3671 239 307	16.0989 801 696	14.9857 655 719	58
59	18.8757 540 013	17.4095 961 428	16.1311 133 676	15.0101 085 182	59
60	18.9292 895 251	17.4498 541 638	16.1614 277 052	15.0329 657 448	60
61	18.9802 757 382	17.4880 134 254	16.1900 261 370	15.0544 279 294	61
62	19.0288 340 363	17.5241 833 416	16.2170 057 896	15.0745 802 154	62
63	19.0750 800 346	17.5584 676 224	16.2424 582 921	15.0935 025 497	63
64	19.1191 238 425	17.5909 645 710	16.2664 700 869	15.1112 699 997	64
65	19.1610 703 262	17.6217 673 659	16.2391 227 235	15.1279 530 514	65
66	19.2010 193 583	17.6509 643 278	16.3104 931 354	15.1436 178 886	66
67	19.2390 660 555	17.6786 391 733	16.3306 539 013	15.1583 266 560	67
68	19.2753 010 052	17.7048 712 543	16.3496 734 918	15.1721 377 051	68
69	19.3098 104 812	17.7297 357 861	16.3676 165 017	15.1851 058 264	69
70	19.3426 766 487	17.7533 040 626	16.3845 438 695	15.1972 824 661	70
71	19.3739 777 607	17.7766 436 613	16.4005 130 844	15.2087 159 306	71
72	19.4037 883 435	17.7968 186 363	16.4155 783 816	15.2194 515 781	72
73	19.4321 793 748	17.8168 897 026	16.4297 909 260	15.2295 319 982	73
74	19.4592 184 522	17.8359 144 101	16.4431 989 868	15.2389 971 814	74
75	19.4849 699 545	17.8539 473 081	16.4558 481 007	15.2478 846 774	75
76	19.5094 951 947	17.8710 401 025	16.4677 812 271	15.2562 297 440	76
77	19.5328 525 664	17.8872 418 033	16.4790 388 935	15.2640 654 873	77
78	19.5550 976 823	17.9025 988 657	16.4896 593 335	15.2714 229 928	78
79	19.5762 835 069	17.9171 553 229	16.4996 786 165	15.2783 314 486	79
80	19.5964 604 828	17.9309 529 127	16.5091 307 703	15.2848 182 616	80
81	19.6156 766 503	17.9440 311 969	16.5180 478 965	15.2090 091 658	81
82	19.6339 777 622	17.9564 276 748	16.5264 602 797	15.2966 283 247	82
83	19.6514 073 925	17.9681 778 908	16.5343 964 903	15.3019 984 270	83
84	19.6680 070 405	17.9793 155 363	16.5418 834 814	15.3070 407 765	84
85	19.6838 162 291	17.9898 725 463	16.5489 466 806	15.3117 753 770	85
86	19.6988 725 991	17.9998 791 908	16.5556 100 760	15.3162 210 113	86
87	19.7132 119 992	18.0093 641 619	16.5618 962 981	15.3203 953 157	87
88	19.7268 685 706	18.0183 546 558	16.5678 266 983	15.3243 148 505	88
89	19.7398 748 292	18.0268 764 510	16.5734 214 116	15.3279 951 648	89
90	19.7522 617 421	18.0349 539 820	16.5786 994 450	15.3314 508 589	90
91	19.7640 588 020	18.0426 104 095	16.5836 787 217	15.3346 956 422	91
92	19.7752 940 971	18.0498 676 867	16.5883 761 525	15.3377 423 870	92
93	19.7859 943 782	18.0567 466 225	16.5928 076 910	15.3406 031 803	93
94	19.7961 851 221	18.0632 669 407	16.5969 883 878	15.3432 893 712	94
95	19.8058 905 925	18.0694 473 372	16.6009 324 413	15.3458 116 161	95
96	19.8151 338 976	18.0753 055 329	16.6046 532 465	15.3481 799 213	96
97	19.8239 370 453	18.0808 583 250	16.6081 634 401	15.3504 036 819	97
98	19.8323 329 955	18.0861 216 351	16.6114 749 435	15.3524 117 201	98
99	19.8403 057 100	18.0911 105 546	16.6145 990 033	15.3544 523 194	99
100	19.8479 102 000	18.0958 393 882	16.6175 462 295	15.3562 932 576	100

附表III

偿债基金系数表

ANNUITY WHOSE ACCUMULATION AT COMPOUND INTEREST IS 1

n \ i	5%	5 1/2%	6%	6 1/2%	i / n
1	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1
2	0.4878 048 780	0.4866 180 049	0.4854 368 932	0.4842 615 012	2
3	0.3172 085 646	0.3156 540 747	0.3141 098 128	0.3125 757 019	3
4	0.2320 118 326	0.2302 944 853	0.2285 914 924	0.2269 027 404	4
5	0.1809 747 981	0.1791 764 362	0.1773 964 004	0.1756 345 376	5
6	0.1470 174 681	0.1451 789 476	0.1433 626 285	0.1415 683 122	6
7	0.1228 198 184	0.1209 644 178	0.1191 350 181	0.1173 313 693	7
8	0.1047 218 136	0.1028 640 118	0.1010 359 426	0.0992 372 971	8
9	0.0906 900 800	0.0888 394 585	0.0870 222 350	0.0852 380 329	9
10	0.0795 045 750	0.0776 677 687	0.0758 679 562	0.0741 046 900	10
11	0.0703 888 915	0.0685 706 531	0.0667 929 381	0.0650 552 058	11
12	0.0628 254 100	0.0610 292 312	0.0592 770 294	0.0575 681 661	12
13	0.0564 557 652	0.0546 842 587	0.0529 601 053	0.0512 825 571	13
14	0.0510 239 695	0.0492 791 154	0.0475 849 090	0.0459 404 806	14
15	0.0463 422 876	0.0446 255 976	0.0429 627 640	0.0413 527 830	15
16	0.0422 699 080	0.0405 825 380	0.0389 521 436	0.0373 775 740	16
17	0.0386 991 417	0.0370 419 723	0.0354 448 042	0.0339 063 265	17
18	0.0355 462 223	0.0339 199 163	0.0323 565 406	0.0308 546 103	18
19	0.0327 450 104	0.0311 500 559	0.0296 208 604	0.0281 557 517	19
20	0.0302 425 872	0.0286 793 300	0.0271 845 570	0.0257 563 954	20
21	0.0279 961 071	0.0264 647 754	0.0250 045 467	0.0236 133 343	21
22	0.0259 705 086	0.0244 712 319	0.0230 455 685	0.0216 912 043	22
23	0.0241 368 219	0.0226 696 472	0.0212 784 847	0.0199 607 802	23
24	0.0224 709 008	0.0210 358 037	0.0196 790 050	0.0183 976 975	24
25	0.0209 524 573	0.0195 493 529	0.0182 267 182	0.0169 814 811	25
26	0.0195 643 207	0.0181 930 713	0.0169 043 466	0.0156 947 983	26
27	0.0182 918 599	0.0169 522 817	0.0156 971 663	0.0145 228 776	27
28	0.0171 225 304	0.0158 143 996	0.0145 925 515	0.0134 530 522	28
29	0.0160 455 149	0.0147 685 720	0.0135 796 135	0.0124 743 976	29
30	0.0150 514 351	0.0138 053 897	0.0126 489 115	0.0115 774 422	30
31	0.0141 321 204	0.0129 166 543	0.0117 922 196	0.0107 539 335	31
32	0.0132 804 189	0.0120 951 895	0.0110 023 374	0.0099 966 481	32
33	0.0124 900 437	0.0113 346 865	0.0102 729 350	0.0092 992 365	33
34	0.0117 554 454	0.0106 295 769	0.0095 984 254	0.0086 560 953	34
35	0.0110 717 072	0.0099 749 266	0.0089 738 590	0.0080 622 606	35
36	0.0104 344 571	0.0093 663 468	0.0083 948 348	0.0075 133 205	36
37	0.0098 397 945	0.0087 999 295	0.0078 574 274	0.0070 053 400	37
38	0.0092 842 282	0.0082 721 659	0.0073 581 240	0.0065 347 995	38
39	0.0087 646 242	0.0077 799 139	0.0068 937 724	0.0060 985 416	39
40	0.0082 781 612	0.0073 203 434	0.0064 615 359	0.0056 937 260	40
41	0.0078 222 924	0.0068 909 001	0.0060 588 551	0.0053 177 915	41
42	0.0073 947 131	0.0064 892 731	0.0056 834 152	0.0049 684 229	42
43	0.0069 933 328	0.0061 133 667	0.0053 331 178	0.0046 435 230	43
44	0.0066 162 506	0.0057 612 757	0.0050 060 565	0.0043 411 874	44
45	0.0062 617 347	0.0054 312 651	0.0047 004 958	0.0040 596 841	45
46	0.0059 282 036	0.0051 217 512	0.0044 148 527	[illegible]037 947 334	46
47	0.0056 142 109	0.0048 312 858	0.0041 476 805	[illegible]0035 529 973	47
48	0.0053 184 306	0.0045 585 424	0.0038 976 549	[illegible].0031 250 549	48
49	0.0050 396 453	0.0043 023 035	0.0036 635 619	0.0031 124 000	49
50	0.0047 767 355	0.0040 614 501	0.0034 442 864	0.0029 139 255	50

偿债基金系数表

ANNUITY WHOSE ACCUMULATION AT COMPOUND INTEREST IS 1

n \ i	5%	5 1/2%	6%	6 1/2%	i / n
51	0.0045 286 697	0.0038 349 523	0.0032 388 028	0.0027 286 146	51
52	0.0042 944 966	0.0036 218 603	0.0030 461 669	0.0025 555 319	52
53	0.0040 733 368	0.0034 212 975	0.0028 655 076	0.0023 938 164	53
54	0.0038 643 770	0.0032 324 534	0.0026 960 209	0.0022 426 740	54
55	0.0036 668 637	0.0030 545 778	0.0025 369 634	0.0021 013 722	55
56	0.0034 800 978	0.0028 869 756	0.0023 876 472	0.0019 692 339	56
57	0.0033 034 300	0.0027 290 020	0.0022 474 350	0.0018 456 332	57
58	0.0031 362 568	0.0025 800 578	0.0021 157 359	0.0017 299 909	58
59	0.0029 780 161	0.0024 396 863	0.0019 920 012	0.0016 217 702	59
60	0.0028 281 845	0.0023 070 692	0.0118 757 215	0.0015 204 735	60
61	0.0026 862 736	0.0021 820 238	0.0017 664 228	0.0014 256 393	61
62	0.0025 518 273	0.0020 640 001	0.0016 636 642	0.0013 368 390	62
63	0.0024 244 296	0.0019 525 782	0.0015 670 351	0.0021 536 742	63
64	0.0023 036 520	0.0018 473 659	0.0014 761 528	0.0011 757 748	64
65	0.0021 891 514	0.0017 479 969	0.0013 906 603	0.0011 027 964	65
66	0.0020 805 683	0.0016 541 284	0.0013 102 248	0.0010 344 184	66
67	0.0019 775 751	0.0015 654 398	0.0012 345 351	0.0009 703 424	67
68	0.0018 798 643	0.0014 816 307	0.0011 633 009	0.0009 102 903	68
69	0.0017 871 473	0.0014 024 198	0.0010 962 506	0.0008 540 027	69
70	0.0016 991 530	0.0013 275 431	0.0010 331 302	0.0008 012 380	70
71	0.0016 156 265	0.0012 567 533	0.0009 737 022	0.0007 517 705	71
72	0.0015 363 280	0.0011 898 180	0.0009 177 439	0.0007 053 899	72
73	0.0041 610 318	0.0011 265 191	0.0008 650 472	0.0006 618 995	73
74	0.0013 896 254	0.0010 666 516	0.0008 154 168	0.0006 211 159	74
75	0.0013 216 085	0.0010 100 230	0.0007 686 698	0.0005 828 675	75
76	0.0021 570 925	0.0009 564 521	0.0007 246 347	0.0005 469 940	76
77	0.0011 957 993	0.0009 057 685	0.0006 831 507	0.0005 133 458	77
78	0.0011 375 610	0.0008 578 119	0.0006 440 667	0.0004 817 826	78
79	0.0010 822 189	0.0008 124 313	0.0006 072 411	0.0004 521 735	79
80	0.0010 296 235	0.0007 694 845	0.0005 725 410	0.0004 243 958	80
81	0.0009 796 332	0.0007 288 376	0.0005 398 414	0.0003 983 350	81
82	0.0009 321 143	0.0006 903 644	0.0005 090 251	0.0003 738 836	82
83	0.0008 869 406	0.0006 539 459	0.0004 799 819	0.0003 509 412	83
84	0.0008 439 924	0.0006 194 699	0.0004 526 081	0.0003 294 137	84
85	0.0008 031 567	0.0005 868 307	0.0004 268 006	0.0003 092 139	85
86	0.0007 643 265	0.0005 559 284	0.0004 024 856	0.0002 902 566	86
87	0.0007 274 005	0.0005 266 688	0.0003 795 593	0.0002 724 671	87
88	0.0006 922 828	0.0004 989 631	0.0003 579 467	0.0002 557 723	88
89	0.0006 588 825	0.0004 727 272	0.0003 375 715	0.0002 401 041	89
90	0.0006 271 136	0.0004 478 820	0.0003 183 623	0.0002 253 990	90
91	0.0005 968 946	0.0004 243 525	0.0003 002 516	0.0002 115 975	91
92	0.0005 681 481	0.0004 020 682	0.0002 831 760	0.0001 986 436	92
93	0.0005 408 008	0.0003 809 621	0.0002 670 759	0.0001 864 851	93
94	0.0005 147 832	0.0003 609 712	0.0002 518 949	0.0001 750 727	94
95	0.0004 900 295	0.0003 420 357	0.0002 375 802	0.0001 643 605	95
96	0.0004 664 770	0.0003 240 994	0.0002 240 821	0.0001 543 053	96
97	0.0004 440 666	0.0003 071 089	0.0002 113 535	0.0001 448 666	97
98	0.0004 227 418	0.0002 910 137	0.0001 993 504	0.0001 360 065	98
99	0.0004 024 492	0.0002 757 664	0.0001 880 310	0.0001 276 893	99
100	0.0003 831 381	0.0002 613 216	0.0001 773 563	0.0001 198 817	100

償債基金系數表

ANNUITY WHOSE ACCUMULATION AT COMPOUND INTEREST IS 1

i / n	7%	7 1/2%	8%	8 1/2%	i / n
1	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1.0000 000 000	1
2	0.4830 917 874	0.4819 277 108	0.4807 692 308	0.4796 163 070	2
3	0.3110 516 657	0.3095 376 282	0.3080 335 140	0.3065 392 485	3
4	0.2250 281 167	0.2235 675 087	0.2219 208 045	0.2202 878 926	4
5	0.1738 906 944	0.1721 647 178	0.1704 564 546	0.1687 657 519	5
6	0.1397 957 998	0.1380 448 912	0.1363 153 862	0.1346 070 840	6
7	0.1155 532 196	0.1138 003 154	0.1120 724 014	0.1103 692 211	7
8	0.0974 677 625	0.0957 270 232	0.0940 147 606	0.0923 306 533	8
9	0.0834 864 701	0.0817 671 595	0.0800 797 092	0.0784 237 233	9
10	0.0723 775 027	0.0706 859 274	0.0690 294 887	0.0674 077 051	10
11	0.0633 569 048	0.0616 974 737	0.0600 763 421	0.0584 929 317	11
12	0.0559 019 887	0.0542 778 314	0.0526 950 169	0.0511 528 581	12
13	0.0496 508 481	0.0480 641 962	0.0465 218 052	0.0450 228 662	13
14	0.0443 449 386	0.0427 973 721	0.0412 968 528	0.0398 424 382	14
15	0.0397 946 247	0.0382 872 363	0.0368 295 449	0.0354 204 614	15
16	0.0358 576 477	0.0343 911 571	0.0329 768 719	0.0316 135 439	16
17	0.0324 251 930	0.0310 000 282	0.0296 294 315	0.0283 119 832	17
18	0.0294 126 017	0.0280 289 578	0.0267 020 959	0.0254 304 127	18
19	0.0267 530 148	0.0254 108 994	0.0241 276 275	0.0229 014 014	19
20	0.0243 929 257	0.0230 921 916	0.0218 522 [illegible]	0.0206 709 744	20
21	0.0222 890 017	0.0210 293 742	0.0198 322 503	0.0186 954 120	21
22	0.0204 057 732	0.0191 868 710	0.0180 320 684	0.0169 389 233	22
23	0.0187 139 263	0.0175 352 780	0.0164 221 691	0.0153 719 258	23
24	0.0171 890 207	0.0160 500 795	0.0149 779 616	0.0139 697 546	24
25	0.0158 105 172	0.0147 106 716	0.0136 787 790	0.0127 116 825	25
26	0.0145 610 279	0.0134 996 124	0.0125 071 267	0.0115 801 651	26
27	0.0134 257 340	0.0124 020 369	0.0114 480 962	0.0105 602 540	27
28	0.0123 919 283	0.0114 051 963	0.0104 889 057	0.0096 391 358	28
29	0.0114 486 518	0.0104 981 081	0.0096 165 350	0.0088 057 657	29
30	0.0101 864 035	0.0096 712 358	0.0088 274 334	0.0080 505 753	30
31	0.0097 969 061	0.0089 162 831	0.0081 072 841	0.0073 652 359	31
32	0.0090 729 155	0.0082 259 887	0.0074 508 132	0.0067 424 664	32
33	0.0084 060 653	0.0075 939 728	0.0068 516 324	0.0061 758 763	33
34	0.0077 967 381	0.0070 146 084	0.0063 041 101	0.0056 596 356	34
35	0.0072 339 596	0.0064 829 147	0.0058 032 646	0.0051 893 685	35
36	0.0067 153 097	0.0059 944 680	0.0063 446 741	0.0047 600 615	36
37	0.0062 368 480	0.0055 453 271	0.0049 244 025	0.0043 679 904	37
38	0.0057 960 515	0.0051 319 709	0.0045 389 361	0.0040 096 556	38
39	0.0053 887 616	0.0047 512 443	0.0041 851 297	0.0036 819 284	39
40	0.0050 091 389	0.0044 003 136	0.0038 601 615	0.0033 820 066	40
41	0.0046 596 245	0.0040 766 282	0.0035 614 940	0.0031 073 700	41
42	0.0043 369 073	0.0037 778 858	0.0032 868 407	0.0028 557 568	42
43	0.0040 358 953	0.0035 020 052	0.0030 341 370	0.0026 251 245	43
44	0.0037 576 913	0.0032 471 012	0.0028 015 156	0.0024 136 299	44
45	0.0034 986 710	0.0030 114 630	0.0025 872 845	0.0022 196 061	45
46	0.0032 599 650	0.0027 935 352	0.0023 899 065	0.0020 415 434	46
47	0.0030 374 421	0.0025 919 080	0.0022 079 922	0.0018 780 731	47
48	0.0028 396 953	0.0024 052 724	0.0020 402 660	0.0017 279 510	48
49	0.0026 365 294	0.0022 324 676	0.0018 855 731	0.0051 990 501	49
50	0.0024 594 495	0.0020 724 102	0.0017 428 582	0.0014 633 395	50

偿债基金系数表

ANNUITY WHOSE ACCUMULATION AT COMPOUND INTEREST IS 1

n \ i	7%	7 1/2%	8%	8 1/2%	i / n
51	0.0022 936 519	0.0019 241 141	0.0061 111 575	0.0013 468 835	51
52	0.0021 390 147	0.0017 866 757	0.0014 895 903	0.0012 398 282	52
53	0.0019 950 908	0.0016 592 661	0.0013 773 506	0.0011 413 945	53
54	0.0018 611 007	0.0015 411 247	0.0012 737 003	0.0010 508 710	54
55	0.0017 363 264	0.0014 315 521	0.0011 779 629	0.0009 676 075	55
56	0.0016 201 059	0.0013 299 053	0.0010 895 180	0.0008 910 096	56
57	0.0015 118 286	0.0012 355 927	0.0010 077 963	0.0008 205 332	57
58	0.0014 109 304	0.0011 480 689	0.0009 322 748	0.0007 556 803	58
59	0.0031 168 900	0.0010 668 318	0.0008 624 729	0.0006 959 948	59
60	0.0012 292 255	0.0009 914 178	0.0007 979 488	0.0006 410 586	60
61	0.0011 474 906	0.0009 213 993	0.0007 382 960	0.0005 904 885	61
62	0.0010 712 723	0.0008 563 816	0.0006 831 404	0.0005 439 330	62
63	0.0010 001 877	0.0007 959 999	0.0006 321 375	0.0005 010 696	63
64	0.0009 338 819	0.0007 399 172	0.0005 849 701	0.0004 616 021	64
65	0.0008 720 257	0.0006 878 216	0.0005 413 458	0.0004 252 588	65
66	0.0008 143 137	0.0006 394 250	0.0005 009 950	0.0003 917 900	66
67	0.0007 604 621	0.0005 944 603	0.0004 636 692	0.0003 609 665	67
68	0.0007 102 075	0.0005 526 807	0.0004 291 391	0.0003 325 773	68
69	0.0006 633 050	0.0005 138 574	0.0003 971 932	0.0003 064 290	69
70	0.0006 195 272	0.0004 777 785	0.0003 676 362	0.0002 823 433	70
71	0.0005 786 623	0.0004 442 477	0.0003 402 881	0.0002 601 565	71
72	0.0005 405 135	0.0004 130 829	0.0003 149 823	0.0002 397 181	72
73	0.0005 048 978	0.0003 841 156	0.0002 915 653	0.0002 208 896	73
74	0.0004 716 446	0.0003 571 892	0.0002 698 950	0.0002 035 434	74
75	0.0004 405 951	0.0003 321 587	0.0002 498 403	0.0001 875 624	75
76	0.0004 116 017	0.0003 088 894	0.0002 312 801	0.0001 728 387	76
77	0.0003 845 265	0.0002 872 564	0.0002 141 024	0.0001 592 730	77
78	0.0003 592 415	0.0002 671 439	0.0001 982 037	0.0001 467 738	78
79	0.0003 356 270	0.0002 484 442	0.0001 834 883	0.0001 352 571	79
80	0.0003 135 718	0.0002 310 575	0.0001 698 677	0.0001 246 454	80
81	0.0002 929 719	0.0002 148 910	0.0001 572 601	0.0001 148 674	81
82	0.0002 727 305	0.0001 998 586	0.0001 455 900	0.0001 058 573	82
83	0.0002 557 575	0.0001 858 805	0.0001 347 874	0.0000 975 548	83
84	0.0002 389 686	0.0001 728 822	0.0001 247 876	0.0000 899 042	84
85	0.0002 232 853	0.0001 607 948	0.0001 155 307	0.0000 828 541	85
86	0.0002 086 343	0.0001 495 542	0.0001 069 615	0.0000 763 575	86
87	0.0001 949 473	0.0001 391 008	0.0000 990 286	0.0000 703 706	87
88	0.0001 821 605	0.0001 293 793	0.0000 916 847	0.0000 648 535	88
89	0.0001 702 145	0.0001 203 384	0.0000 848 861	0.0000 597 692	89
90	0.0001 590 537	0.0001 119 302	0.0000 785 920	0.0000 550 838	90
91	0.0001 486 262	0.0001 041 102	0.0000 727 651	0.0000 507 659	91
92	0.0001 388 837	0.0000 968 374	0.0000 673 705	0.0000 467 867	92
93	0.0001 297 811	0.0000 900 731	0.0000 623 762	0.0000 431 195	93
94	0.0001 212 760	0.0000 837 820	0.0000 577 524	0.0000 397 399	94
95	0.0001 133 292	0.0000 779 306	0.0000 534 716	0.0000 366 253	95
96	0.0001 059 039	0.0100 724 884	0.0000 495 083	0.0000 337 549	96
97	0.0000 989 658	0.0000 674 265	0.0000 458 389	0.0000 311 095	97
98	0.0000 924 828	0.0000 627 184	0.0000 424 416	0.0000 286 715	98
99	0.0000 864 251	0.0000 583 393	0.0000 392 963	0.0000 264 247	99
100	0.0000 807 646	0.0000 542 661	0.0000 363 841	0.0000 243 540	100

附表IV

资金回收系数表

ANNUITY WHOSE PRESENT VALUE AT COMPOUND INTEREST IS 1

n \ i	5%	5 1/2%	6%	6 1/2%	i / n
1	1.0500 000 000	1.0550 000 000	1.0600 000 000	1.0650 000 000	1
2	0.5378 048 780	0.5416 180 049	0.5454 368 933	0.5492 615 012	2
3	0.3672 085 646	0.3706 540 747	0.3741 098 129	0.3775 757 019	3
4	0.2820 118 326	0.2852 944 853	0.2885 914 924	0.2919 027 404	4
5	0.2309 747 981	0.2341 764 362	0.2373 964 004	0.2406 345 376	5
6	0.1970 174 681	0.2001 789 476	0.2033 626 285	0.2065 683 122	6
7	0.1728 198 184	0.1759 644 178	0.1791 350 181	0.1823 313 693	7
8	0.1547 218 136	0.1578 640 118	0.1610 359 426	0.1642 372 971	8
9	0.1406 900 800	0.1438 394 585	0.1470 222 350	0.1502 380 329	9
10	0.1295 045 750	0.1326 677 687	0.1358 679 582	0.1391 046 900	10
11	0.1203 888 915	0.1235 706 531	0.1267 929 381	0.1300 552 058	11
12	0.1128 254 100	0.1160 292 312	0.1192 770 294	0.1225 681 661	12
13	0.1064 557 652	0.1096 842 587	0.1129 601 053	0.1162 825 571	13
14	0.1010 239 695	0.1042 791 154	0.1075 849 090	0.1109 404 806	14
15	0.0963 422 876	0.0996 255 976	0.1029 627 640	0.1063 527 880	15
16	0.0922 699 080	0.0955 825 380	0.0989 521 436	0.1023 775 740	16
17	0.0886 991 417	0.0920 419 723	0.0954 448 042	0.0989 063 265	17
18	0.0855 462 223	0.0889 199 163	0.0923 565 406	0.0958 546 103	18
19	0.0827 450 104	0.0861 500 559	0.0896 208 604	0.0931 557 517	19
20	0.0802 425 872	0.0836 793 300	0.0871 845 570	0.0907 563 954	20
21	0.0779 961 071	0.0814 647 754	0.0850 045 467	0.0886 133 343	21
22	0.0759 705 086	0.0794 712 319	0.0830 455 685	0.0866 912 043	22
23	0.0741 368 219	0.0776 696 472	0.0812 784 847	0.0849 607 802	23
24	0.0724 709 008	0.0760 358 037	0.0796 790 050	0.0833 976 975	24
25	0.0709 524 573	0.0745 493 529	0.0782 267 182	0.0819 814 811	25
26	0.0695 643 207	0.0731 930 713	0.0769 043 466	0.0806 947 983	26
27	0.0682 918 599	0.0719 522 817	0.0756 971 663	0.0795 228 776	27
28	0.0671 225 304	0.0708 143 996	0.0745 925 515	0.0784 530 522	28
29	0.0660 455 149	0.0697 685 720	0.0735 796 135	0.0774 743 976	29
30	0.0650 514 351	0.0688 053 897	0.0726 489 115	0.0765 774 422	30
31	0.0641 321 204	0.0679 166 543	0.0717 922 196	0.0757 539 335	31
32	0.0632 804 189	0.0670 951 895	0.0710 023 374	0.0749 966 481	32
33	0.0624 900 437	0.0663 346 865	0.0702 729 350	0.0742 992 365	33
34	0.0617 554 454	0.0656 295 769	0.0695 981 254	0.0736 560 953	34
35	0.0610 717 072	0.0649 749 266	0.0689 738 590	0.0730 622 606	35
36	0.0604 344 571	0.0643 663 488	0.0683 948 348	0.0725 133 205	36
37	0.0598 397 945	0.0637 999 295	0.0678 574 274	0.0720 053 400	37
38	0.0592 842 282	0.0632 721 659	0.0673 581 240	0.0715 347 995	38
39	0.0587 646 242	0.0627 799 139	0.0668 937 724	0.0710 965 416	39
40	0.0582 781 612	0.0623 203 434	0.0664 615 359	0.0706 937 260	40
41	0.0578 222 924	0.0618 909 001	0.0660 588 551	0.0703 177 915	41
42	0.0573 947 131	0.0614 892 731	0.0656 834 152	0.0699 684 229	42
43	0.0569 933 328	0.0611 133 667	0.0653 331 178	0.0696 435 230	43
44	0.0566 162 506	0.0607 612 757	0.0650 060 565	0.0693 411 874	44
45	0.0562 617 347	0.0604 312 651	0.0647 004 958	0.0690 596 841	45
46	0.0559 282 036	0.0601 217 512	0.0644 148 527	0.0687 974 344	46
47	0.0556 142 109	0.0598 312 858	0.0641 476 805	0.0685 529 973	47
48	0.0553 184 306	0.0595 585 424	0.0638 976 549	0.0683 250 549	48
49	0.0550 396 453	0.0593 023 035	0.0636 635 619	0.0681 124 000	49
50	0.0547 767 355	0.0590 614 501	0.0634 442 864	0.0679 139 255	50

资金回收系数表

ANNUITY WHOSE PRESENT VALUE AT COMPOUND INTEREST IS 1

n \ i	5%	5 1/2%	6%	6 1/2%	i / n
51	0.0545 286 697	0.0588 349 523	0.0623 388 028	0.0677 286 146	51
52	0.0542 944 966	0.0586 218 603	0.0630 461 669	0.0675 555 319	52
53	0.0540 733 368	0.0584 212 975	0.0628 655 076	0.0673 938 164	53
54	0.0538 643 770	0.0582 324 534	0.0626 960 209	0.0672 426 740	54
55	0.0536 668 637	0.0580 545 778	0.0325 369 634	0.0671 013 722	55
56	0.0534 800 978	0.0578 869 756	0.0623 876 472	0.0669 692 339	56
57	0.0533 034 300	0.0577 290 020	0.0622 474 350	0.0668 456 332	57
58	0.0531 362 568	0.0575 800 578	0.0621 157 359	0.0667 299 909	58
59	0.0529 780 161	0.0574 395 863	0.0619 920 012	0.0666 217 702	59
60	0.0528 281 845	0.0573 070 692	0.0618 757 215	0.0665 204 735	60
61	0.0526 862 736	0.0571 820 238	0.0617 664 228	0.0664 256 393	61
62	0.0525 518 273	0.0570 640 001	0.0616 636 642	0.0663 368 390	62
63	0.0524 244 196	0.0569 525 782	0.0615 670 351	0.0662 536 742	63
64	0.0523 036 520	0.0568 473 659	0.0614 761 528	0.0661 757 748	64
65	0.0521 891 514	0.0567 479 969	0.0613 906 603	0.0661 027 964	65
66	0.0520 805 683	0.0566 541 284	0.0613 102 248	0.0660 344 184	66
67	0.0519 775 751	0.0565 654 398	0.0612 345 351	0.0659 703 424	67
68	0.0518 798 643	0.0564 816 307	0.0611 633 009	0.0659 102 903	68
69	0.0517 871 473	0.0564 024 198	0.0610 962 506	0.0658 540 027	69
70	0.0516 991 530	0.0563 275 431	0.0610 331 302	0.0658 012 380	70
71	0.0516 156 265	0.0562 567 533	0.0609 737 022	0.0657 517 705	71
72	0.0515 363 280	0.0561 898 180	0.0609 177 439	0.0657 053 899	72
73	0.0514 610 318	0.0561 265 191	0.0608 650 472	0.0656 618 995	73
74	0.0513 895 254	0.0560 666 516	0.0608 154 168	0.0656 211 159	74
75	0.0513 216 085	0.0560 100 230	0.0607 686 698	0.0655 828 675	75
76	0.0512 570 925	0.0559 564 521	0.0607 246 347	0.0655 469 940	76
77	0.0511 957 993	0.0559 057 685	0.0606 831 507	0.0655 133 458	77
78	0.0511 375 610	0.0558 578 119	0.0606 440 667	0.0654 817 826	78
79	0.0510 822 189	0.0558 124 313	0.0606 072 411	0.0654 521 735	79
80	0.0510 296 235	0.0557 694 845	0.0605 725 410	0.0654 243 958	80
81	0.0509 796 332	0.0557 288 376	0.0605 398 414	0.0653 983 350	81
82	0.0509 321 143	0.0556 903 644	0.0650 090 251	0.0653 738 836	82
83	0.0508 869 406	0.0556 539 459	0.0604 799 819	0.0653 509 412	83
84	0.0508 439 924	0.0556 194 699	0.0604 526 081	0.0653 294 137	84
85	0.0508 031 567	0.0555 868 307	0.0604 268 066	0.0653 092 130	85
86	0.0507 643 265	0.0555 559 284	0.0604 024 856	0.0652 901 566	86
87	0.0507 274 005	0.0555 266 688	0.0603 795 593	0.0652 724 671	87
88	0.0506 922 828	0.0554 989 631	0.0603 579 467	0.0652 557 723	88
89	0.0506 588 825	0.0554 727 272	0.0603 375 715	0.0652 401 041	89
90	0.0504 271 136	0.0554 478 820	0.0603 183 623	0.0652 253 990	90
91	0.0505 968 946	0.0554 243 525	0.0603 002 516	0.0652 115 975	91
92	0.0505 681 481	0.0554 020 682	0.0602 831 760	0.0651 986 436	92
93	0.0505 408 008	0.0553 809 621	0.0602 670 759	0.0651 864 851	93
94	0.0505 147 832	0.0553 609 712	0.0602 518 949	0.0651 750 727	94
95	0.0504 900 295	0.0553 420 357	0.0602 375 802	0.0651 643 605	95
96	0.0504 664 770	0.0553 240 994	0.0606 240 821	0.0651 543 053	96
97	0.0504 440 666	0.0553 071 089	0.0602 113 535	0.0651 448 666	97
98	0.0504 227 418	0.0552 910 137	0.0601 993 504	0.0651 360 065	98
99	0.0504 024 492	0.0552 757 664	0.0601 880 310	0.0651 276 893	99
100	0.0503 831 381	0.0552 613 216	0.0601 773 563	0.0651 198 817	100

附表V

复利和贴现表

利率

10%

年	数额为1的复利因数 原始数额按复利计算的终值	每年数额为1的复利因数 每年年末存入等额存款均按复利计算的终值	偿债基金因数 在给定年限内，为达到数额为1而需要每年存入的等额存款
1	1.100 000	1.000 000	1.000 000
2	1.210 000	2.100 000	.476 190
3	1.331 000	3.310 000	.302 115
4	1.464 100	4.641 000	.215 471
5	1.610 510	6.105 100	.163 797
6	1.771 561	7.715 610	.129 607
7	1.948 717	9.487 171	.105 405
8	2.143 589	11.435 888	.087 444
9	2.357 948	13.579 477	.073 641
10	2.593 742	15.937 425	.062 745
11	2.853 117	18.531 167	.053 963
12	3.138 428	21.384 284	.046 763
13	3.452 271	24.522 712	.040 779
14	3.797 498	27.974 983	.035 746
15	4.177 248	31.772 482	.031 474
16	4.594 973	35.949 730	.027 817
17	5.054 470	40.544 703	.024 664
18	5.559 917	45.599 173	.021 930
19	6.115 909	51.159 090	.019 547
20	6.727 500	57.274 999	.017 460
21	7.400 250	64.002 499	.015 624
22	8.140 275	71.402 749	.014 005
23	8.954 302	79.543 024	.012 572
24	9.849 733	88.497 327	.011 300
25	10.834 706	98.347 059	.010 168
26	11.918 177	109.181 765	.009 159
27	13.109 994	121.099 942	.008 258
28	14.420 994	134.209 936	.007 451
29	15.863 093	148.630 930	.006 728
30	17.449 402	164.494 023	.006 079
31	19.194 342	181.943 425	.005 496
32	21.113 777	201.137 767	.004 972
33	23.225 154	222.251 544	.004 499
34	25.547 670	245.476 699	.004 074
35	28.102 437	271.024 368	.003 690
36	30.912 681	299.126 805	.003 343
37	34.003 949	330.039 486	.003 030
38	37.404 343	364.043 434	.002 747
39	41.144 778	401.447 778	.002 491
40	45.259 256	442.592 556	.002 259
41	49.785 181	487.851 811	.002 050
42	54.763 699	537.636 992	.001 860
43	60.240 069	592.400 692	.001 688
44	66.264 076	652.640 761	.001 532
45	72.890 484	718.904 837	.001 391
46	80.179 532	791.795 321	.001 263
47	88.197 485	871.974 853	.001 147
48	97.017 234	960.172 338	.001 041
49	106.718 957	1.057 189 572	.000 946
50	117.390 853	1.163 908 529	.000 859

一贴现因数 在未来时日 数额为 1 的现值	年金现值因数 在 X 年中，每年收入或 付出数额为 1 的现值	资本回收因数 在 X 年中，1 元的债务， 对未偿还余额按复利 计算的每年偿还数额	利率 **10%** 年
.909 091	.909 091	1.100 000	1
.826 446	1.735 537	.576 190	2
.751 315	2.486 852	.402 115	3
.683 013	3.169 865	.315 471	4
.620 921	3.790 787	.263 797	5
.564 474	4.355 261	.229 607	6
.513 158	4.868 419	.205 405	7
.466 507	5.334 926	.187 444	8
.424 098	5.759 024	.173 641	9
.385 543	6.144 567	.162 745	10
.350 494	6.495 061	.153 963	11
.318 631	6.813 692	.146 763	12
.289 664	7.103 356	.104 779	13
.263 331	7.366 687	.135 746	14
.239 392	7.606 080	.131 474	15
.217 629	7.823 709	.127 817	16
.197 845	8.021 553	.124 664	17
.179 859	8.201 412	.121 930	18
.163 508	8.364 920	.119 547	19
.148 644	8.513 564	.117 460	20
.135 131	8.648 694	.115 624	21
.122 846	8.771 540	.114 005	22
.111 678	8.883 218	.112 572	23
.101 526	8.984 744	.111 300	24
.092 296	9.077 040	.110 168	25
.083 905	9.160 945	.109 159	26
.076 278	9.237 223	.108 258	27
.069 343	9.306 567	.107 451	28
.063 039	9.369 606	.106 728	29
.057 309	9.426 914	.106 079	30
.052 099	9.479 013	.105 496	31
.047 362	9.526 376	.104 972	32
.043 057	9.569 432	.104 499	33
.039 143	9.608 575	.104 074	34
.035 584	9.644 159	.103 690	35
.032 349	9.676 508	.103 343	36
.029 408	9.705 917	.103 030	37
.026 735	9.732 651	.102 747	38
.024 304	9.756 956	.102 491	39
.022 095	9.779 051	.102 259	40
.020 086	9.799 137	.102 050	41
.018 260	9.817 397	.101 860	42
.016 600	9.833 998	.101 688	43
.015 091	9.849 089	.101 532	44
.013 719	9.862 808	.101 391	45
.012 472	9.875 280	.101 263	46
.011 338	9.886 618	.101 147	47
.001 307	9.896 926	.101 041	48
.009 370	9.906 296	.100 946	49
.008 519	9.914 814	.100 859	50

利率

12%

年	数额为 1 的复利因数 原始数额按复利计算的终值	每年数额为 1 的复利因数 每年年末存入等额存款均按复利计算的终值	偿债基金因数 在给定年限内，为达到数额为 1 而需要每年存入的等额存款
1	1.120 000	1.000 000	1.000 000
2	1.254 400	2.120 000	.471 698
3	1.404 928	3.374 400	.296 349
4	1.573 519	4.779 328	.209 234
5	1.762 342	6.352 847	.157 410
6	1.973 823	8.115 189	.123 226
7	2.210 681	10.089 012	.099 118
8	2.475 963	12.299 693	.081 303
9	2.773 079	14.775 656	.067 679
10	3.105 848	17.548 735	.056 984
11	3.478 550	20.654 583	.048 415
12	3.895 976	24.133 133	.041 437
13	4.363 493	28.029 109	.035 677
14	4.887 112	32.392 602	.030 871
15	5.473 566	37.279 715	.026 824
16	6.130 394	42.753 280	.023 390
17	6.866 041	48.883 674	.020 457
18	7.689 966	55.749 715	.017 937
19	8.612 762	63.439 681	.015 763
20	9.646 293	72.052 442	.013 879
21	10.803 848	81.698 736	.012 240
22	12.100 310	92.502 584	.010 811
23	13.552 347	104.602 894	.009 560
24	15.178 629	118.155 241	.008 463
25	17.000 064	133.333 870	.007 500
26	19.040 072	150.333 934	.006 652
27	21.324 881	169.374 007	.005 904
28	23.883 866	190.698 887	.005 244
29	26.749 930	214.582 754	.004 660
30	29.959 922	241.332 684	.004 144
31	33.555 113	271.292 606	.003 686
32	37.581 726	304.847 719	.003 280
33	42.091 533	342.429 446	.002 920
34	47.142 517	384.520 979	.002 601
35	52.799 620	431.663 496	.002 317
36	59.135 574	484.463 116	.002 064
37	66.231 843	543.598 690	.001 840
38	74.179 664	609.830 533	.001 640
39	83.081 224	684.010 197	.001 462
40	93.050 970	767.091 420	.001 304
41	104.217 087	860.142 391	.001 163
42	116.723 137	964.359 478	.001 037
43	130.729 914	1.081 082 615	.000 925
44	146.417 503	1.211 812 529	.000 825
45	163.987 604	1.358 230 032	.000 736
46	183.666 116	1.522 217 636	.000 657
47	205.706 050	1.705 883 752	.000 586
48	230.390 776	1.911 589 803	.000 523
49	258.037 669	2.141 980 579	.000 467
50	289.002 190	2.400 018 249	000.417

利率 **12%**

一贴现因数 在未来时日数额为1的现值	年金现值因数 在X年中,每年收人或付出数额为1的现值	资本回收因数 在X年中,1元的债务,对未偿还余额按复利计算的每年偿还数额	年
.892 857	.892 857	1.120 000	1
.797 194	1.690 051	.591 698	2
.711 780	2.401 831	.416 349	3
.635 518	3.037 349	.329 234	4
.567 427	3.604 776	.277 410	5
.506 631	4.111 407	.243 226	6
.452 349	4.563 757	.219 118	7
.403 883	4.967 640	.201 303	8
.360 610	5.328 250	.187 679	9
.321 973	5.650 223	.176 984	10
.287 476	5.937 699	.168 415	11
.256 675	6.194 374	.161 437	12
.229 174	6.423 548	.155 677	13
.204 620	6.628 168	.150 871	14
.182 696	6.810 864	.146 824	15
.163 122	6.973 986	.143 390	16
.145 644	7.119 630	.140 457	17
.130 040	7.249 670	.137 937	18
.116 107	7.365 777	.135 763	19
.103 667	7.469 444	.133 879	20
.092 560	7.562 003	.132 240	21
.082 643	7.644 646	.130 811	22
.073 788	7.718 434	.129 560	23
.065 882	7.784 316	.128 463	24
.058 823	7.843 139	.127 500	25
.052 521	7.895 660	.126 652	26
.046 894	7.942 554	.125 904	27
.041 869	7.984 423	.125 244	28
.037 383	8.021 806	.124 660	29
.033 378	8.055 184	.124 144	30
.029 802	8.084 986	.123 686	31
.026 609	8.111 594	.123 280	32
.023 758	8.135 352	.122 920	33
.021 212	8.156 564	.122 601	34
.018 940	8.175 504	.122 317	35
.016 910	8.192 414	.122 064	36
.015 098	8.207 513	.121 840	37
.013 481	8.220 993	.121 640	38
.012 036	8.233 030	.121 462	39
.010 747	8.243 777	.121 304	40
.009 595	8.253 372	.121 163	41
.008 567	8.261 939	.121 037	42
.007 649	8.269 589	.120 925	43
.006 830	8.276 418	.120 825	44
.006 098	8.282 516	.120 736	45
.005 445	8.287 961	.120 657	46
.004 861	8.292 822	.120 586	47
.004 340	8.297 163	.120 523	48
.003 875	8.301 038	.120 467	49
.003 460	8.304 498	.120 417	50